بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست مطالب

فصل اول: عددهای صحیح و گویا

عددهای طبیعی

عددهای $1, 2, 3, 4, \ldots$ را عددهای طبیعی می‌گوییم و مجموعهٔ اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم.

نکته کوچک‌ترین عدد طبیعی 1 است و بزرگ‌ترین عدد طبیعی نامشخص می باشد.

عددهای صحیح

عددهای $\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$ را عددهای طبیعی می‌گوییم و مجموعهٔ اعداد صحیح را با $\mathbb{Z}$ نمایش می‌دهیم.

مثال **کدام یک از اعداد زیر صحیح است؟** (مشابه تمرین صفحهٔ 5 کتاب درسی)

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $\sqrt{27}$ ۳) $\frac{-10}{2}$ ۴) 3.14

پاسخ گزینهٔ «3» هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (1): مقدار $\frac{7}{2}$ برابر 3.5 می‌باشد که عددی صحیح نیست. ×

گزینهٔ (2): $\sqrt{27}$ دارای جذر صحیح نمی باشد بنابراین عددی صحیح نیست. ×

گزینهٔ (3): $\frac{-10}{2}$ برابر -5 می‌باشد که عددی صحیح است. ✓

گزینهٔ (4): 3.14 عددی اعشاری است و صحیح نیست. ×

نکات اعداد صحیح

نکتهٔ 1 با کمی دقت به مجموعهٔ اعداد صحیح و طبیعی می‌توان گفت که هر عدد طبیعی، عددی صحیح است.

نکتهٔ 2 اعداد صحیح شامل مثبت (همان اعداد طبیعی)، عدد صفر و اعداد منفی (قرینهٔ اعداد طبیعی) است.

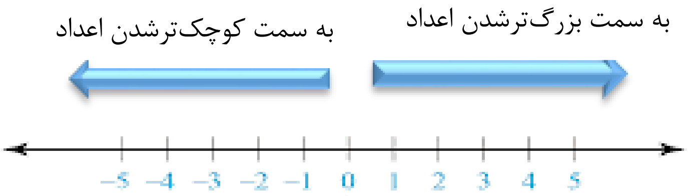
توجه کنید که عدد صفر نه مثبت است و نه منفی، درواقع می‌توان گفت صفر بدون علامت است.

$$\underbrace{\dots,-3,-2,-1}_{\text{اعداد منفی}}\ ,\ \underbrace{0}_{\text{بدون علامت}}\ ,\underbrace{+1,+2,+3,\dots}_{\text{اعداد مثبت}}$$

نکتهٔ 3 چون اعداد صحیح از دو طرف (هم مثبت‌ها و هم منفی‌ها) ادامه‌دار است، بنابراین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد صحیح نامشخص است.

نکتهٔ 4 اعداد مثبت از صفر بزرگ‌تر و اعداد منفی از صفر کوچک‌تر هستند و نیز اعداد منفی هر چه مقدار بزرگ‌تری داشته باشند، دارای ارزش کم‌تری هستند.

$-2017 < -1\ ,\ -9 < -3$



نکتهٔ 5 اگر علامت عددی را تغییر دهیم آن عدد قرینه می‌شود.

$+2\ \text{قرینهٔ} = -(+2) = -2\ ,\qquad -10\ \text{قرینهٔ} = -(-10) = +10$

تذکر در قرینه کردن، اگر تعداد علامت‌های منفی زوج بود، علامت نهایی مثبت و اگر تعداد منفی‌ها فرد بود، علامت نهایی منفی می‌شود.

$$-(-(-3)) = -3 \ , \ -(-7) = +7$$

مثال درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.

الف: تعداد اعداد صحیح بزرگ‌تر از -5 بی‌شمار است.

ب: کوچک‌ترین عدد صحیح منفی دو رقمی عدد -10 است.

پاسخ الف: اعداد صحیح بزرگ‌تر از -5 عبارتند از: $-4 , -3 , -2$ و ... که تعداد آن‌ها بی‌شمار است؛ بنابراین عبارت درست است.

ب: می‌دانیم اعداد منفی هر چه مقدار بزرگ‌تری داشته باشند، دارای ارزش کم‌تری هستند. بنابراین کوچک‌ترین عدد صحیح منفی دو رقمی عدد -99 است و عبارت نادرست است.

جمع اعداد صحیح

برای سهولت در جمع دو عدد صحیح، معمولاً دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

الف: عددها هم‌علامت باشند: در این حالت عددها را با هم جمع کرده و در آخر یکی از علامت‌ها را برای حاصل‌جمع قرار می‌دهیم.

$$-5 + (-6) = -(5 + 6) = -11$$

ب: عددها هم‌علامت نباشند: در این حالت اختلاف دو عدد را بدون درنظر گرفتن علامت آن‌ها حساب می‌کنیم و در آخر علامت عددی را که مقدار آن بیشتر است برای حاصل قرار می‌دهیم.

$$(-9)+(+5)=-(9-5)=-4$$

تفریق اعداد صحیح

برای راحتی در تفریق دو یا چند عدد صحیح، ابتدا عمل تفریق را به جمع تبدیل کرده و سپس با توجه به حالت‌هایی که در جمع اعداد صحیح گفتیم، عمل می‌کنیم.

$$-5-7=(-5)+(-7)=-(5+7)=-12$$

مثال حاصل عبارت $2-4+6-8+\cdots-24$ را به دست آورید.

پاسخ حاصل تفریق هر دو عدد متوالی برابر -2 است و نیز تعداد اعداد زوج از 2 تا 24 برابر 12 تا است؛

بنابراین:

تعداد دسته‌ها : $\frac{12}{6}=6$

حاصل عبارت : $6\times(-2)=-12$.

ضرب و تقسیم عددهای صحیح

ابتدا علامت حاصل را تعیین کرده سپس اعداد را بدون درنظر گرفتن علامت در هم ضرب و یا بر هم تقسیم می‌کنیم.

مثال حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{(-\mathbf{12})\times(+\mathbf{21})}{(+\mathbf{35})\times(-\mathbf{44})}$$

پاسخ ابتدا علامت حاصل را تعیین می‌کنیم.

$$\frac{(-)\times(+)}{(+)\times(-)}=\frac{(-)}{(-)}=+$$

بنابراین علامت حاصل عبارت مثبت است و داریم:

$$+\frac{\overset{3}{\cancel{12}}\times\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{5}{\cancel{35}}\times\underset{11}{\cancel{44}}}=\frac{9}{55}$$

اولویت انجام عملیات

اولویت انجام اعمال ریاضی به صورت زیر است:

1) پرانتز (اگر چند پرانتز داشته باشیم از داخلی‌ترین شروع می‌کنیم.)

2) توان و جذر

3) ضرب و تقسیم (از سمت چپ)

4) جمع و تفریق

مثال **حاصل عبارت $5^2 - 2^5 \times (82 - 9 \times 3^2)$ را به دست آورید.**

(مشابه تمرین صفحهٔ 5 کتاب درسی)

پاسخ با توجه به رعایت ترتیب عملیات داریم:

$$5^2 - 2^5 \times (82 - 9 \times 3^2) = 25 - 32 \times (82 - 9 \times 9)$$

$$= 25 - 32 \times \underset{1}{\cancel{(82 - 81)}} = 25 - 32 = -7$$

عددهای گویا

به هر عدد، که بتوانیم به صورت کسر $\frac{a}{b}$ (که در آن a و b عددهای صحیح باشند و $b \neq 0$) بنویسیم، عدد گویا می‌گوییم.

نکته هر عدد صحیح یا هر عدد طبیعی، یک عدد گویا است.

نکته اعداد رادیکالی که دارای جذر صحیح نیستند، گویا نمی‌باشند.

مثال **کدام یک از گزینه‌های زیر عددی گویا نیست؟**

1) 5 2) $\sqrt{25}$ 3) $\sqrt{2}$ 4) $-\frac{1}{2}$

پاسخ گزینهٔ «3» هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «1» : گویا است، زیرا 5 عددی طبیعی است و هر عدد طبیعی گویا است.

گزینهٔ «2» : گویا است، $\sqrt{25}$ برابر 5 است و دارای جذر دقیق می‌باشد.

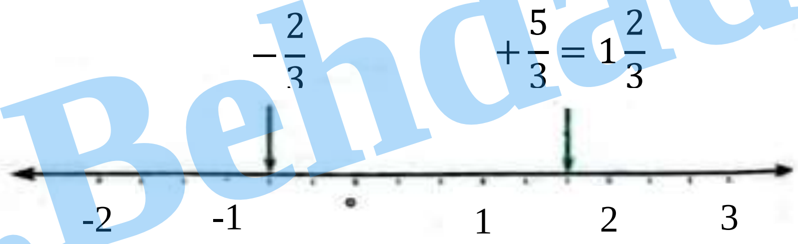
گزینهٔ «3» : گویا نیست، $\sqrt{2}$ دارای جذر دقیق نیست؛ بنابراین گویا نمی‌باشد.

گزینهٔ «4» : گویا است، صورت و مخرج کسر، عددهای صحیح هستند.

نکات اعداد گویا

نکتهٔ 1 برای نشان دادن یک عدد گویا روی محور اعداد، باید هر واحد را به مقدار عدد مخرج عدد گویای داده شده تقسیم‌بندی کرد و با توجه به علامت عدد گویا، محل آن را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم.

$-\frac{2}{3}$ و $+\frac{5}{3}$



با توجه به مخرج کسرهای داده شده هر واحد را به 3 قسمت مساوی تقسیم کردیم.

نکتهٔ 2 علامت منفی پشت یک کسر متعلق به کل کسر می‌باشد یعنی می‌توان آن را به صورت یا مخرج اختصاص داد.

$$-\frac{3}{4}=\frac{-3}{4}=\frac{3}{-4}$$

نکتهٔ 3 قرینهٔ اعداد گویا مانند قرینهٔ اعداد صحیح می‌باشند یعنی فاصلهٔ هر عدد گویا تا صفر برابر است با فاصلهٔ قرینهٔ آن تا صفر و برای به دست آوردن قرینه، علامت کسر را تغییر می‌دهیم.

قرینهٔ $1\frac{3}{4} = -1\frac{3}{4}$

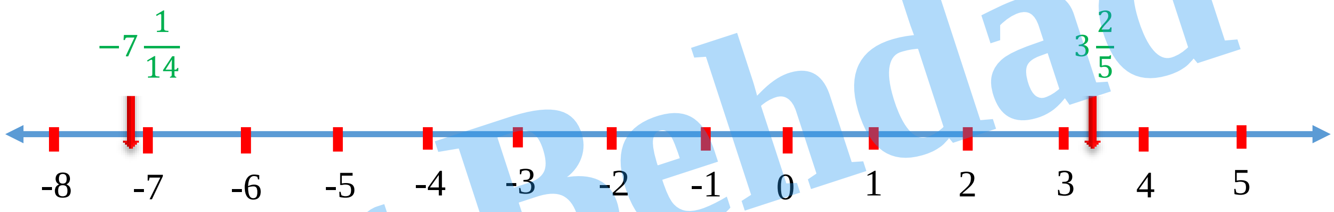
قرینهٔ $-\frac{2}{7} = \frac{2}{7}$

نکتهٔ 4 بین هر دو عدد گویای غیرمساوی، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد که بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین آن‌ها مشخص نیست.

مثال دو عدد $3\frac{2}{5}$ و $-7\frac{1}{14}$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

پاسخ عدد $3\frac{2}{5}$ بین 3 و 4 قرار دارد و عدد $-7\frac{1}{14}$ بین -7 و -8 است.

در زیر، محل تقریبی این دو عدد گویا روی محور نشان داده شده است.



اعداد صحیح بین دو عدد گویای داده شده از -7 تا $+3$ هستند، که 11 تا می‌باشند.

کسرهای مساوی

اگر صورت و مخرج یک کسر را در عددی غیر از صفر ضرب و یا بر آن تقسیم کنیم، کسری مساوی آن به دست می‌آید.

$$\underset{\times 5}{\overset{\times 5}{-\frac{3}{4} = -\frac{15}{x}}} \quad \Rightarrow \quad x = 20$$

$$\underset{\div 3}{\overset{\div 3}{\frac{9}{15} = \frac{3}{5}}}$$

ساده کردن کسرها

اگر صورت و مخرج یک کسر را بر ب.م.م آن‌ها تقسیم کنیم، آن کسر تا حد امکان ساده شده است.

مثال عبارت مقابل را تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{-92}{-115}$$

پاسخ در گام اول دقت کنید علامت کسر مثبت است و در ادامه می‌دانیم $(92\,,115)=23$ ، بنابراین صورت و مخرج را بر 23 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{-92}{-115}=\frac{\overset{4}{\cancel{92}}}{\underset{5}{\cancel{115}}}=\frac{4}{5}$$

مقایسهٔ دو کسر

برای مقایسهٔ دو کسر با علامت مثبت، معمولاً مخرج‌ها را یکسان می‌کنیم. برای این کار، با توجه به ک.م.م مخرج دو کسر داده شده، کسرهای مساوی آن‌ها را می‌نویسیم و کسری که صورت بزرگ‌تری دارد، بزرگ‌تر است؛ اما اگر علامت دو کسر منفی باشد در مرحلهٔ آخر، کسر با صورت بزرگ‌تر را به عنوان کسر کوچک‌تر انتخاب می‌کنیم.

$$-\frac{3}{7}\bigcirc-\frac{2}{9}\qquad\Rightarrow\qquad-\frac{27}{63}=-\frac{3}{7}\ \boxed{<}\ -\frac{2}{9}=-\frac{14}{63}$$

نکته کسرهای با علامت مثبت همواره از کسرهای با علامت منفی بزرگ‌ترند.

نوشتن چند کسر بین دو کسر

می‌دانیم بین هر دو کسر (عدد گویا) بی‌شمار کسر وجود دارد که برای نوشتن تعداد دلخواهی از آن‌ها این طور عمل می‌کنیم که ابتدا بین دو کسر مخرج مشترک گرفته، سپس صورت و مخرج کسرها را در یکی بیشتر از تعداد مورد نیاز ضرب می‌کنیم.

مثال دو کسر بین اعداد $\frac{3}{4}$ و $\frac{2}{7}$ را بنویسید.

پاسخ ابتدا بین دو کسر مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{2}{7},\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{8}{28},\frac{21}{28}$$

حال می‌توانیم از کسرهای $\frac{9}{28}$, $\frac{10}{28}$ و ... $\frac{20}{28}$ ، دو کسر را به دلخواه انتخاب کرد.

جمع و تفریق عددهای گویا

الف) روی محور

با توجه به تقسیم‌بندی هر واحد روی محور اعداد صحیح به قسمت‌های کوچک‌تر، متناظر با هر حرکت، می‌توان یک عدد گویا نوشت؛ درنتیجه برای حرکت‌های متوالی روی محور می‌توان یک جمع متناظر نوشت و برای نوشتن تفریق اعداد گویا، مانند اعداد صحیح می‌توانیم عدد اول را با قرینهٔ عدد دوم جمع کنیم.

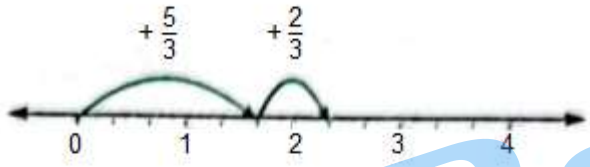
مثال تفریق زیر را روی محور اعداد نشان دهید و حاصل را بنویسید.

$$\left(+\frac{5}{3}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)$$

پاسخ ابتدا تفریق داده شده را به جمع تبدیل می‌کنیم:

$$\left(+\frac{5}{3}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(+\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)$$

حال هر یک از واحدهای محور اعداد صحیح را به 3 قسمت مساوی تقسیم کرده و متناظر با هر عدد گویا، در جهت علامت آن حرکت می‌کنیم:



$$\left(+\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)=\frac{+7}{3}\ \text{یا}\ 2\frac{1}{3}$$

ب) روش محاسباتی

ابتدا علامت مخرج‌ها را مثبت می‌کنیم، سپس ک.م.م مخرج‌ها را به عنوان مخرج مشترک در نظر گرفته و درنهایت حاصل جمع یا تفریق صورت‌ها را محاسبه می‌کنیم.

مثال حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)$$

پاسخ با توجه به ک.م.م دو عدد 3 و 4 بین دو کسر، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{12}-\frac{8}{12}=-\frac{5}{12}$$

ضرب اعداد گویا

برای ضرب عددهای گویا ابتدا علامت حاصل را مشخص کرده سپس صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$\left(-\frac{1}{10}\right)\times\left(+\frac{8}{12}\right)=-\frac{1}{\underset{5}{\cancel{10}}}\times\frac{\overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{12}}}=-\frac{1}{15}$$

معکوس یک عدد گویا

اگر جای صورت و مخرج یک کسر را عوض کنیم، معکوس آن به دست می‌آید.

عدد صفر، تنها عددی است که معکوس ندارد.

$$7\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{1}{7}$$

$$-\frac{3}{4}\xrightarrow{\text{معکوس}}-\frac{4}{3}$$

نکته حاصل‌ضرب هر عدد غیر از صفر در معکوس خود، برابر 1 است.

مثال **قرینهٔ معکوس $-2\frac{3}{5}$ را به دست آورید.**

(مشابه کار در کلاس صفحهٔ 16 کتاب درسی)

پاسخ ابتدا عدد مخلوط داده شده را به کسر تبدیل می‌کنیم و سپس آن را معکوس و در نهایت قرینه می‌کنیم:

$$-2\frac{3}{5} = -\frac{13}{5} \xrightarrow{\text{معکوس}} -\frac{5}{13} \xrightarrow{\text{قرینه}} \frac{5}{13}$$

تقسیم اعدا گویا

برای تقسیم عددهای گویا ابتدا علامت حاصل را مشخص کرده، سپس کسر اول را نوشته و آن را در معکوس کسر دوم، ضرب می‌کنیم.

$$\left(-\frac{14}{19}\right) \div \left(-\frac{28}{18}\right) = +\frac{\overset{1}{\cancel{14}}}{19} \times \frac{\overset{9}{\cancel{18}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{28}}} = \frac{9}{19}$$

نکته در ضرب و تقسیم اعداد مخلوط، ابتدا اعداد مخلوط را به کسر تبدیل می‌کنیم.

نکته برای محاسبهٔ حاصل عبارت‌های گویا، با رعایت تمام مواردی که دربارهٔ چهار عمل اصلی روی اعداد گویا ذکر شد، به اولویت انجام عملیات ریاضی نیز توجه می‌کنیم.

فصل دوم: عددهای اول

شمارنده های طبیعی یک عدد

به اعداد طبیعی که عدد a ، بر آن‌ها بخش‌پذیر است، شمارنده‌های عدد a می‌گوییم.

12 شمارنده‌های $= \{1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 12\}$

اعداد طبیعی را با توجه به تعداد شمارنده‌های آن‌ها می‌توان به سه دستهٔ زیر تقسیم کرد:

الف) اعداد اول ب) اعداد مرکب پ) عدد یک

الف) اعداد اول

هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک، که هیچ شمارندهٔ طبیعی به جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود؛ مانند: 3 , 7 , 11 , 37 و ... .

مثال کدام عدد فقط دو شمارنده دارد؟

1) 57 2) 46 3) 59 4) 58

پاسخ گزینهٔ «3» گزینهٔ «1» بر 3 و گزینه‌های (2) و (4) بر 2 بخش‌پذیر هستند؛ بنابراین اول نیستند اما گزینهٔ (3) اول است زیرا 59 تنها بر 1 و خودش بخش‌پذیر است.

نکات اعداد اول

نکتهٔ 1 هر عدد اول تنها دارای دو شمارنده است، یکی عدد 1 و دیگری خود عدد، بنابراین هر عدد اول را نمی‌توان به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک نوشت.

نکتهٔ 2 تعداد عددهای اول بی‌شمار است که اولین و کوچک‌ترین آن‌ها عدد 2 و بزرگ‌ترین آن‌ها نامشخص است.

نکتهٔ 3 عدد 2، تنها عدد اول زوج است و بقیهٔ اعداد اول، فرد هستند.

نکتهٔ 4 هر عدد اول، فقط یک شمارندهٔ اول و یک مضرب اول دارد که آن هم خود عدد است.

نکتهٔ 5 از آن‌جا که مجموع و اختلاف یک عدد فرد و یک عدد زوج همواره عددی فرد است، بنابراین اگر مجموع یا اختلاف دو عدد اول، عددی فرد شود، می‌توان گفت یکی از آن اعداد حتماً 2 است.

مثال مجموع دو عدد اول 49 می‌باشد، عدد بزرگ‌تر کدام است؟

پاسخ از آن‌جا که مجموع دو عدد اول، عددی فرد شده است، بنابراین یکی از آن حتماً 2 است؛ بنابراین عدد بزرگ‌تر 47 می‌باشد.

ب) اعداد مرکب

هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک که غیر از خودش و یک، شمارنده‌های طبیعی دیگری داشته باشد و یا به عبارت دیگر اول نباشد، مرکب است؛ مانند: 6, 21 , 25 و ... .

نکات اعداد مرکب

نکتهٔ 1 از آن‌جا که اعداد مرکب بیش‌تر از دو شمارنده دارند می‌توان آن‌ها را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک نوشت.

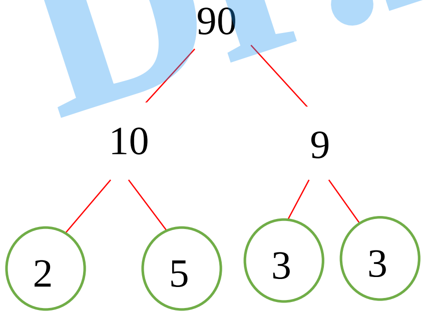
نکتهٔ 2 تمامی مضرب‌های طبیعی یک عدد اول، به غیر از خودش مرکب هستند؛ هم‌چنین تمامی مضارب طبیعی یک عدد مرکب، مرکب هستند.

نکتهٔ 3 برای تجزیهٔ هر عدد مرکب باید آن را به صورت ضرب دو یا چند شمارندهٔ اول نوشت (برای تجزیهٔ اعداد مرکب از نمودار درختی استفاده می‌کنیم).

مثال عدد 90 چند شمارندهٔ اول دارد؟

پاسخ با استفاده از رسم نمودار درختی، شمارنده‌های اول عدد 90 را تعیین می‌کنیم:

بنابراین شمارنده‌های اول 90 اعداد 5, 3 و 2 هستند.



نکتهٔ 4 با داشتن تجزیه شدهٔ یک عدد مرکب می‌توان کلیهٔ شمارنده‌های آن عدد را نوشت.

نکتهٔ 5 با داشتن تعدادی از شمارنده‌های یک عدد، می‌توانیم بعضی دیگر از شمارنده‌های آن عدد را مشخص کنیم.

مثال اگر 4 و 9 دو شمارندهٔ عددی باشند، شش شمارندهٔ دیگر آن عدد را پیدا کنید.

(مشابه تمرین صفحهٔ 23 کتاب درسی)

پاسخ چون در بین شمارنده‌های عدد مورد نظر 4 و 9 هستند، پس این عدد حتماً دو شمارندهٔ اول 2 و دو شمارندهٔ اول 3 دارد که با نوشتن حالت‌های مختلف ضرب آن‌ها و درنظر گرفتن 1 به عنوان شمارندهٔ تمام اعداد طبیعی داریم:

$\{1\,,2\,,3\,,2\times3\,,2\times2\times3\,,2\times2\times3\times3\}$

$\{1\,,2\,,3\,,6\,,12\,,36\}$

پ) عدد یک

با توجه به تعریف اعداد اول و مرکب می‌توان گفت عدد یک نه اول است و نه مرکب.

دو عدد نسبت به هم اول

اگر ب.م.م (بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه {شمارندهٔ} مشترک) دو عدد برابر یک باشد، می‌گوییم آن دو عدد نسبت به هم اول هستند؛ مانند: (7 ، 8) و (11 ، 17) .

نکات دو عدد نسبت به هم اول

نکتهٔ 1 هر دو عدد اول دلخواه، نسبت به هم اول هستند.

نکتهٔ 2 هر دو عدد متوالی دلخواه، نسبت به هم اول هستند.

نکتهٔ 3 ک.م.م دو عدد نسبت به هم اول برابر با حاصل‌ضرب آن دو عدد است.

نکتهٔ 4 دقت کنید دو عدد ممکن است اول نباشند، اما نسبت به یکدیگر اول باشند $(9\,,25)=1$.

مثال **کدام دو عدد نسبت به هم اول‌اند؟**

1) 15 و 3 **2) 25 و 5** **3) 9 و 3** **4) 25 و 9**

پاسخ گزینهٔ «4» دو عدد را نسبت به هم اول می‌گوییم، هرگاه ب.م.م آن‌ها برابر یک باشد. هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «1»: $(3\,,15)=3$، بنابراین نسبت به هم اول نیستند.

گزینهٔ «2»: $(5\,,25)=5$، بنابراین نسبت به هم اول نیستند.

گزینهٔ «3»: $(3\,,9)=3$، بنابراین نسبت به هم اول نیستند.

گزینهٔ «4»: $(9\,,25)=1$، بنابراین نسبت به هم اول هستند.

تعیین عددهای اول به روش غربال

برای تعیین عددهای اول دربین اعداد متوالی 1 تا n، ابتدا عدد 1 را خط می‌زنیم، سپس مضرب‌های مرکب اعداد اول را خط می‌زنیم و خط زدن را تا عدد اولی ادامه می‌دهیم که مجذور آن در بین عددهای نوشته شده نباشد. در آخر، اعدادی که خط نخورده‌اند، اعداد اول هستند.

مثال **عددهای اول از 1 تا 20 را به روش غربال تعیین کنید.**

(مشابه تمرین صفحهٔ 27 کتاب درسی)

پاسخ برای تعیین عددهای اول بین 1 تا 20 به روش غربال، ابتدا عدد 1 را خط زدیم، بعد مضارب عدد 2 را که اول است و سپس مضارب عدد 3 را که قبلاً خط نخورده‌اند و درنهایت چون مربع عدد اول بعدی یعنی 5 از 20 بزرگ‌تر است، خط زدن را ادامه نمی‌دهیم، اعداد باقی‌مانده همگی اول هستند:

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5
~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~
11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~
~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~

نکات روشن غربال

نکتهٔ 1 برای تشخیص این که یک عدد به عنوان مضرب کدام عدد اول خط خورده است، کافی است آن را تجزیه کرده و کوچک‌ترین شمارندهٔ اول آن را مشخص کنیم.

نکتهٔ 2 برای تشخیص این که کدام عدد، آخرین عددی است که خط می‌خورد، ابتدا مشخص می‌کنیم آخرین عدد اولی که مضارب آن را خط می‌زنیم کدام است، سپس مشخص می‌کنیم کدام یک از مضرب‌های آن تا به حال خط نخورده و به عنوان آخرین عدد در روش غربال خط می‌خورد.

مثال در غربال اعداد 1 تا 150:

الف) اولین عددی که خط می‌خورد کدام است؟

ب) مضارب چند عدد اول خط می‌خورند؟

پ) آخرین عددی که خط می‌خورد کدام است؟

ت) اولین عددی که با مضارب 7 خط می‌خورد کدام است؟

ث) 77 اُمین عددی که خط می‌خورد کدام است؟

پاسخ الف) اولین عددی که در روش غربال خط می‌زنیم عدد 1 است.

ب) بزرگ‌ترین عدد اولی که مجذور آن از 150 کوچک‌تر است عدد 11 می‌باشد؛ بنابراین مضارب اعداد اول 2، 3، 5، 7 و 11، یعنی 5 عدد اول را خط می‌زنیم.

پ) آخرین عددی که خط می‌خورد مضرب عدد اول 11 می‌باشد؛ اما از بین مضارب 11 همگی به جز 11 × 11 یعنی 121 قبلاً به عنوان مضارب سایر اعداد اول کوچک‌تر از 11 خط خورده‌اند.

ت) از بین مضارب 7 به جز خودش مثل 2 × 7، 3 × 7 و .... تا 6 × 7 همگی به عنوان مضارب سایر اعداد اول کوچک‌تر از 7 خط خورده‌اند، اولین عددی که به عنوان مضرب 7 خط می‌خورد 7 × 7 یعنی 49 می‌باشد.

ث) ابتدا 1 را خط می‌زنیم، سپس تمامی مضارب 2 به جز خودش که اعداد زوج می‌باشند و 74 تا هستند؛ پس تا به حال 75 عدد را خط زده‌ایم. حال به سراغ مضارب عدد اول 3 می‌رویم که 76اُمین عددی که خط می‌خورد 3 × 3 یعنی 9 و 77اُمین عدد 5 × 3 یعنی 15 می‌باشد. دقت کنید 2 × 3 و 4 × 3 قبلاً به عنوان مضارب 2 خط خورده‌اند.

نکته برای تشخیص اول یا مرکب بودن یک عدد، کافی است بزرگ‌ترین عدد اولی که مجذور آن از عدد موردنظر بزرگ‌تر نیست را پیدا کرده، سپس بخش‌پذیری عدد موردنظر را بر آن و اعداد اول کوچک‌تر از آن بررسی کنیم.

مثال مشخص کنید عدد 149 اول است یا مرکب؟

پاسخ بزرگ‌ترین عدد اولی که مجذور (مربع) آن از 149 کوچک‌تر باشد، عدد 11 است؛ بنابراین کافی است بخش‌پذیری عدد 149 را بر اعداد 2، 3، 5، 7 و 11 بررسی کنیم و از آن‌جایی که بر هیچ‌کدام از این اعداد اول بخش‌پذیر نیست؛ بنابراین عدد 149 اول است.

فصل سوم: چندضلعی‌ها

چندضلعی‌ها

در صفحه به هر خط **شکستهٔ بسته**، چندضلعی می‌گوییم به شرط این که ضلع‌ها یکدیگر را **قطع نکنند**، مگر در **رأس‌ها** که دو ضلع به هم می‌رسند.

مثال کدام شکل زیر، چندضلعی است؟

1)


2)


3)


4)


پاسخ گزینهٔ «4» هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ «1»: شکل از خط شکسته ساخته نشده است؛ بنابراین چندضلعی نیست. ×

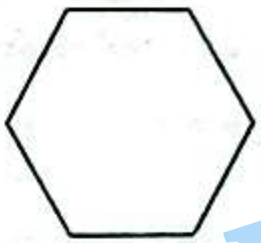
گزینهٔ «2»: اضلاع یکدیگر را قطع کرده‌اند؛ بنابراین چندضلعی نیست. ×

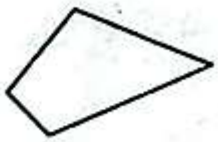
گزینهٔ «3»: خط شکستهٔ داده شده بسته نمی‌باشد؛ بنابراین چندضلعی نیست. ×

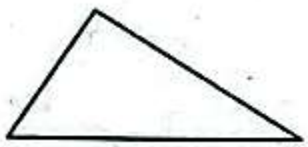
گزینه‌ی «4»: شکل، خط شکستهٔ بسته است که اضلاع همدیگر را قطع نکرده‌اند (مگر در رأس‌ها)؛ بنابراین چندضلعی است. ✓

چندضلعی محدب

اگر هر زاویهٔ یک چندضلعی، کوچک‌تر از 180° باشد، آن چندضلعی محدب نام دارد. چندضلعی‌های زیر، محدب هستند.

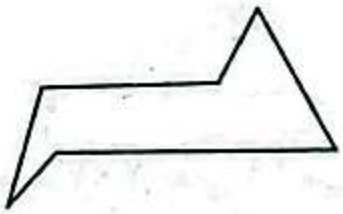


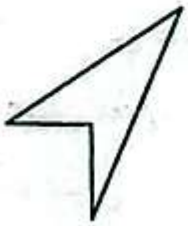




چندضلعی مقعر

هر چندضلعی که حداقل یکی از زاویه‌های داخلی آن بزرگ‌تر از 180° باشد، آن چندضلعی مقعر نام دارد. چندضلعی‌های زیر، مقعر هستند.





چندضلعی منتظم

اگر در یک چندضلعی همهٔ ضلع‌ها با هم و همهٔ زاویه‌ها با هم مساوی باشند، می‌گوییم آن چندضلعی منتظم است.

به طور مثال مثلث متساوی‌الأضلاع سه‌ضلعی منتظم و مربع چهارضلعی منتظم هستند.

مثال درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) به چندضلعی‌هایی که همهٔ ضلع‌هایشان، با هم مساوی است، چندضلعی منتظم گویند.

ب) به چندضلعی‌هایی که دست‌کم یک زاویهٔ بزرگ‌تر از 180° داشته باشند، چندضلعی محدب گویند.

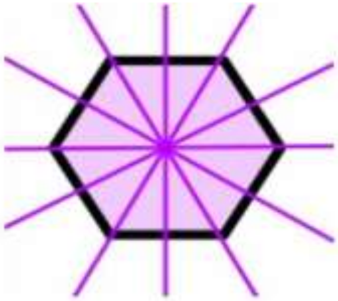
پاسخ الف) نادرست است، برای این که یک چندضلعی، منتظم باشد باید علاوه بر مساوی بودن ضلع‌ها با هم، زاویه‌ها نیز با هم مساوی باشند؛ بنابراین عبارت نادرست است.

ب) نادرست است، عبارت داده شده تعریف چندضلعی مقعر می‌باشد، نه چندضلعی محدب.

نکته در چندضلعی‌های منتظم، هرچه تعداد ضلع‌ها بیشتر باشد، اندازهٔ هر زاویه بزرگ‌تر و شکل بیشتر شبیه دایره می‌شود.

محور تقارن

خطی است که شکل را به دو قسمت کاملاً مساوی تقسیم می‌کند که اگر شکل را از روی آن خط تا کنیم، دو قسمت شکل بر هم منطبق می‌شوند.



مرکز تقارن

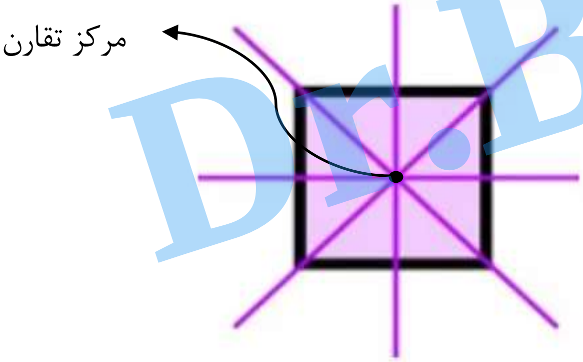
اگر شکلی را حول یک نقطه در داخل آن، 180° درجه دوران دهیم و نتیجهٔ دوران، دوباره روی خود شکل منطبق باشد، آن نقطه مرکز تقارن شکل نام دارد. به طور مثال مربع و مستطیل دارای مرکز تقارن هستند.

نکات مرکز تقارن

نکتهٔ 1 مرکز تقارن را می‌توان این‌گونه تعریف کرد که نقطه‌ای است در داخل شکل به طوری که قرینهٔ هر نقطهٔ دلخواه از شکل، نسبت به آن، روی شکل قرار می‌گیرد.

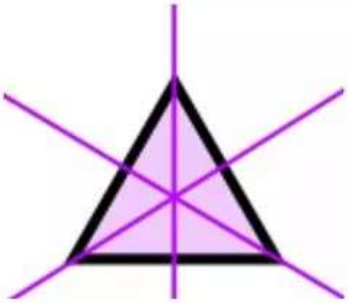
نکتهٔ 2 هر n ضلعی منتظم که تعداد اضلاع آن زوج باشد، دارای مرکز تقارن است و مرکز تقارن آن محل برخورد خط‌های تقارن آن شکل می باشد.

در مربع روبه‌رو محورهای تقارن و محل برخورد آن‌ها یعنی مرکز تقارن مربع، مشخص شده است.



نکتهٔ 3 هر n ضلعی منتظم که تعداد اضلاع آن فرد باشد، مرکز تقارن ندارد.

در مثلث متساوی‌الأضلاع روبه‌رو، محورهای تقارن رسم شده است؛ اما شکل فاقد مرکز تقارن است.



توازی

اگر دو خط a و b با هم موازی باشند، موازی بودن آن‌ها را به صورت $a \parallel b$ نمایش می‌دهیم.

تعامد

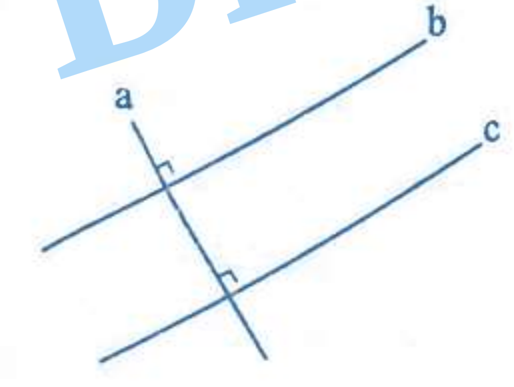
اگر دو خط a و b بر هم عمود باشند، عمود بودن آن‌ها را به صورت $a \perp b$ نمایش می‌دهیم.

مورب

اگر خط a با خط b موازی نباشد و یکدیگر را قطع کنند، مورب بودن آن‌ها را به صورت $a \nparallel b$ نمایش می‌دهیم.

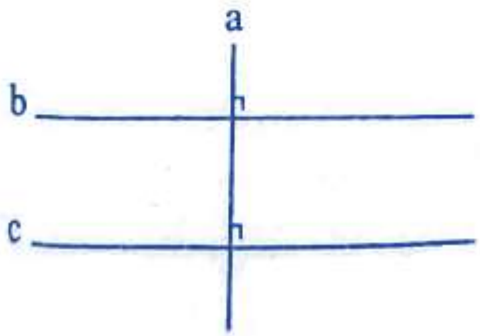
نکات توازی و تعامد

نکتهٔ 1 اگر خطوط b و c بر خط a عمود باشند، آن‌گاه b و c موازی هستند. به عبارت دیگر دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.



$$\left.\begin{array}{l} a \perp b \\ a \perp c \end{array}\right\} \Rightarrow b \parallel c$$

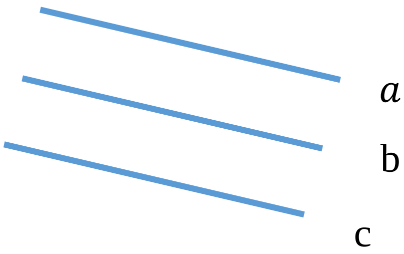
نکتهٔ 2 اگر خطوط b و c با هم موازی باشند و خط a بر b عمود باشد، آن‌گاه a بر c نیز عمود است. به عبارت دیگر اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود بر دیگری نیز عمود است.



$$\left.\begin{matrix} b \parallel c \\ a \perp b \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a \perp c$$

نکتهٔ 3 اگر خط a با خط b موازی باشد و خط b نیز با خط c موازی باشد، آن‌گاه خط a با خط c موازی است.

به عبارت دیگر دو خط موازی با یک خط با هم موازی هستند.



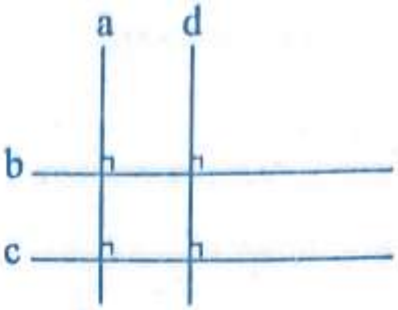
$$\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ b \parallel c \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a \parallel c$$

مثال جملات زیر را کامل کنید.

الف) اگر $a \perp b$ ، $b \parallel c$ و $c \perp d$ باشد، آن‌گاه d .... a است.

ب) اگر خطی، بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز .... است.

پاسخ الف) خط a بر خط b عمود است، خط b با خط c موازی بوده و c بر d عمود است. وضعیت خط های داده شده را نسبت به هم رسم می‌کنیم؛ بنابراین خط a با خط d موازی است:

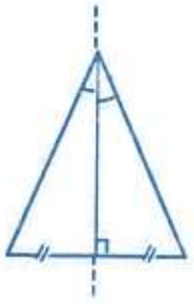


$$a \parallel d$$

ب) اگر خطی، بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

ارتفاع در مثلث متساوی‌الساقین

در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، عمود منصف قاعده، نیمساز زاویهٔ رأس و محور تقارن مثلث است.

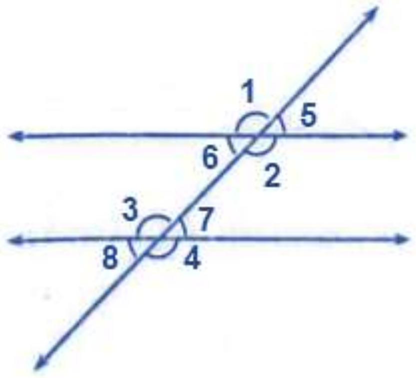


ارتفاع در مثلث متساوی‌الأضلاع

در مثلث متساوی‌الأضلاع، هر یک از ارتفاع‌ها، عمود منصف قاعده، نیمساز زاویهٔ رأس و محور تقارن مثلث هستند.

خطوط موازی و مورب

اگر خط موربی، دو خط موازی را قطع کند، هشت زاویه به وجود می‌آید که چهار تا از آن‌ها، زاویهٔ تند و چهارتای دیگر، باز هستند که زاویه‌های تند با هم و زاویه‌های باز با هم برابرند و یک زاویهٔ تند یک زاویهٔ باز، مکمل یکدیگرند.

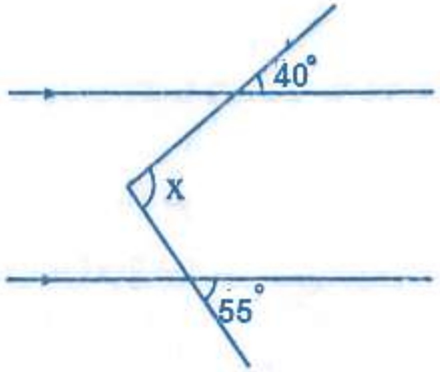


$$\hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4}$$

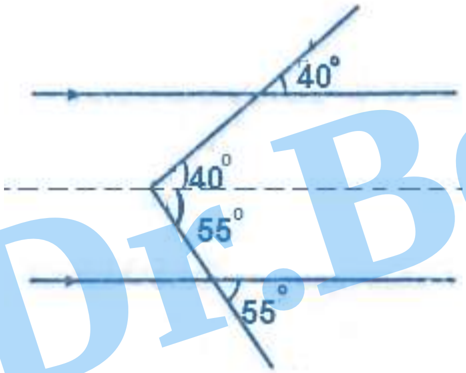
$$\hat{5} = \hat{6} = \hat{7} = \hat{8}$$

در شکل بالا، هر زاویهٔ باز با هر زاویهٔ تند، مکمل هستند.

مثال در شکل مقابل، مقدار x را حساب کنید.



پاسخ از محل برخورد دو خط مورب، خطی موازی با دو خط موازی رسم می‌کنیم و بنا برخاصیت خطوط موازی و مورب داریم:



$$x = 40^\circ + 55^\circ = 95^\circ$$

چهارضلعی‌ها

الف) متوازی الاضلاع

چهارضلعی که ضلع‌های روبه‌روی آن دوبه‌دو با هم موازی‌اند، متوازی‌الأضلاع نام دارد.

خواص متوازی الاضلاع

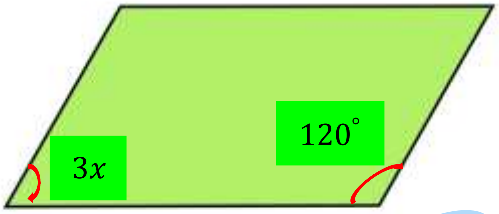
1ـ محل برخورد قطرهای متوازی‌الأضلاع مرکز تقارن آن است.

2ـ در متوازی‌الأضلاع، ضلع‌های روبه‌رو، با هم مساوی‌اند.

3ـ در متوازی‌الأضلاع، زاویه‌های مجاور، مکمل یکدیگر هستند.

4ـ در متوازی‌الأضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

مثال در متوازی‌الأضلاع زیر، مقدار x را حساب کنید.



پاسخ زوایای مجاور در متوازی‌الأضلاع مکمل هم هستند؛ بنابراین داریم:

$$3x+120^{\circ}=180^{\circ} \quad \Longrightarrow \quad 3x=60^{\circ} \quad \Longrightarrow \quad x=20^{\circ}$$

نکته در متوازی‌الأضلاع قطرها با یکدیگر برابر نیستند.

ب) مستطیل

مستطیل، متوازی‌الأضلاعی است که چهار زاویهٔ قائمه دارد.

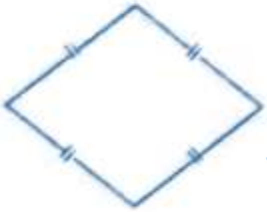
خواص مستطیل

هر مستطیل تمامی خاصیت‌های متوازی‌الأضلاع را دارد؛ بنابراین می‌توان گفت مستطیل نوعی متوازی‌الأضلاع است.

علاوه بر خاصیت‌های متوازی‌الأضلاع، در هر مستطیل، قطرها با هم برابرند.

پ) لوزی

لوزی، متوازی‌الأضلاعی است که چهار ضلع برابر است.



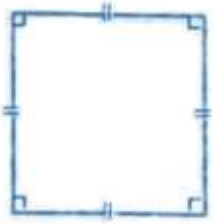
خواص لوزی

هر لوزی تمامی خاصیت‌های متوازی‌الأضلاع را دارد؛ بنابراین می‌توان گفت لوزی، نوعی متوازی‌الأضلاع است.

علاوه بر خاصیت‌های متوازی‌الأضلاع، در هر لوزی، قطرها بر هم عمود بوده و هر قطر نیمساز زاویه‌های مقابل است.

ت) مربع

مربع، متوازی‌الأضلاعی است که چهار ضلع مساوی و چهار زاویه‌ی قائمه دارد.



خواص مربع

هر مربع تمامی خاصیت‌های متوازی‌الأضلاع را دارد؛ بنابراین می‌توان گفت مربع، نوعی متوازی‌الأضلاع است؛ هم‌چنین چون مربع تمام خواص لوزی را دارد، می‌توان گفت هر مربع نوعی لوزی است. علاوه بر خاصیت‌های متوازی‌الأضلاع، در هر مربع، قطرها با هم برابر و عمود منصف یکدیگرند. هم‌چنین هر قطر نیمساز زاویه‌های مقابل است.

ث) ذوزنقه

چهار ضلعی است که تنها دو ضلع آن با هم موازی هستند.

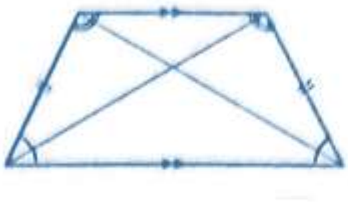
نکته با توجه به تعریف ذوزنقه، بدیهی است که ذوزنقه نوعی متوازی‌الأضلاع نیست.

خواص ذوزنقه

1ـ دو ضلع موازی ذوزنقه را قاعده و دو ضلع غیرموازی آن را ساق می‌نامیم.

2ـ در هر ذوزنقه زوایای مجاور به هر ساق، مکمل یکدیگر هستند.

نکته اگر ساق‌های یک ذوزنقه با هم مساوی باشند به آن ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌گوییم که در آن زاویه‌های تند با هم و زاویه‌های باز با هم برابرند.



نکته در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطرها با هم برابر هستند.

مثال درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) متوازی‌الأضلاعی که قطرهای مساوی داشته باشد، مربع است.

ب) هر لوزی که یک زاویهٔ قائمه داشته باشد، مربع است.

پ) مستطیل، متوازی‌الأضلاعی است که یک زاویهٔ 90 درجه دارد.

پاسخ الف) نادرست است، اگر اضلاع آن با هم برابر نباشند ممکن است مستطیل باشد.

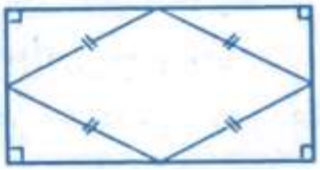
ب) درست است، لوزی متوازی‌الأضلاعی است که اضلاع برابر دارد و چون زوایای مقابل برابر و زوایای مجاور مکمل هستند، بنابراین شکل مورد نظر مربع است.

پ) درست است، می‌دانیم مستطیل، متوازی‌الأضلاعی است که چهار زاویهٔ قائمه داشته باشد اما اگر یکی از زوایا قائمه باشد، چون زوایای مجاور مکمل و زوایای مقابل برابرند، بنابراین شکل مورد نظر مستطیل است.

نکات پایانی چهارضلعی‌ها

نکتهٔ 1 اگر وسط ضلع‌های یک مربع را به ترتیب به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل، مربع است.

نکتهٔ 2 اگر وسط ضلع‌های یک مستطیل را به ترتیب به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل، لوزی است.



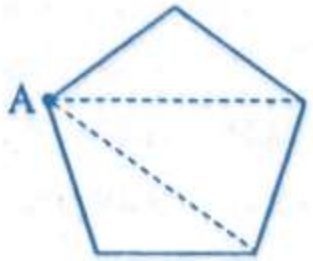
زاویه‌های داخلی

زاویه‌هایی که درون یک چندضلعی قرار دارند، زاویه‌های داخلی آن چندضلعی نامیده می‌شوند.

مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی

با توجه به این که می‌دانیم مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° است، برای محاسبهٔ مجموع زاوایای داخلی یک چندضلعی، از یک رأس تمام قطرهای آن را رسم کرده و چندضلعی را به تعدادی مثلث تقسیم می‌کنیم؛ درنهایت مجموع زاویه‌های تمامی مثلث‌های ساخته شده برابر با مجموع زوایای چندضلعی می‌باشد.

برای محاسبهٔ مجموع زوایای داخلی پنج‌ضلعی زیر از رأس A تمامی قطرها را رسم کرده‌ایم و شکل به 3 مثلث تقسیم شده است.



مجموع زوایا $= 3 \times 180^\circ = 540^\circ$

نکته مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی برابر است با: $(n-2) \times 180^\circ$

اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک چندضلعی منتظم

از آن‌جا که زوایای داخلی یک n ضلعی منتظم با هم برابرند و مجموع زوایای داخلی n ضلعی برابر با $(n-2)\times 180^{\circ}$ است؛ می‌توان گفت:

$$\text{اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی } n\text{ضلعی منتظم} = \frac{(n-2)\times 180^{\circ}}{n}$$

مثال یکی از زوایای داخلی یک n ضلعی منتظم 162 درجه است. تعداد محورهای تقارن در این چند ضلعی را بیابید.

پاسخ می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک n ضلعی منتظم برابر است با:

$$\frac{(n-2)\times 180^{\circ}}{n}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{(n-2)\times 180^{\circ}}{n} = \frac{162^{\circ}}{1} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (n-2)\times 180^{\circ} = 162\,n$$

$$\Longrightarrow \quad 180n - 360^{\circ} = 162n \quad \Longrightarrow \quad 180n - 162n = 360^{\circ}$$

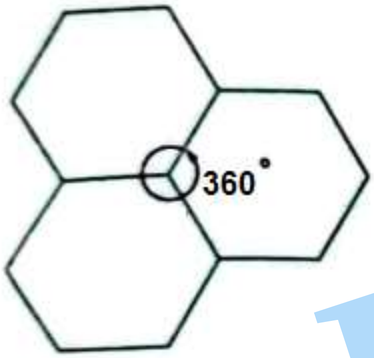
$$\Longrightarrow \quad 18n = 360^{\circ} \quad \Longrightarrow \quad n = 20$$

بنابراین چندضلعی موردنظر 20 ضلعی منتظم است که دارای 20 محور تقارن است.

کاشی‌کاری

برای کاشی‌کاری یک سطح با کاشی‌هایی که به شکل چندضلعی منتظم هستند، باید اندازهٔ یک زاویهٔ داخلی چندضلعی منتظم، شمارندهٔ 360° باشد.

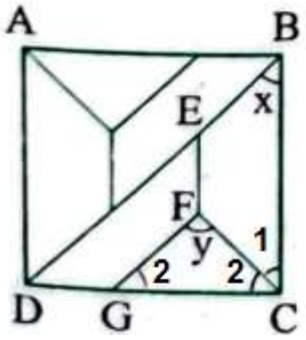
به طورمثال برای کاشی‌کاری یک سطح می‌توان از کاشی‌هایی به شکل شش‌ضلعی منتظم استفاده کرد زیرا همان‌طور که می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی شش‌ضلعی منتظم برابر 120° است که شمارندهٔ 360° است.



مثال برای کاشی‌کاری سطح مربع شکل روبه‌رو از کاشی‌هایی به شکل مثلث و ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین استفاده شده است. مقدار x و y را به دست آورید.

پاسخ در مربع ABCD، قطر BD نیمساز زاویهٔ B می‌باشد؛ بنابراین:

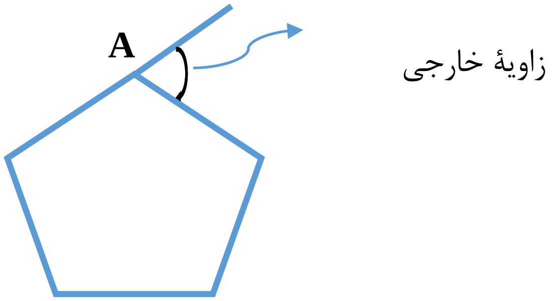
$x = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ ، اما با توجه به این که کاشی‌ها متساوی‌الساقین هستند، بنابراین زاویهٔ C_1 در ذوزنقهٔ BEFC نیز برابر 45° است و چون زاویهٔ C در مربع 90° است پس زاویهٔ C_2 و نیز G_2 در مثلث متساوی‌الساقین FGC برابر 45° می‌باشند و داریم:



$$y = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$$

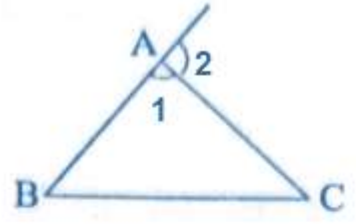
زاویهٔ خارجی

زاویه‌ای که در هر رأس یک چندضلعی محدب، بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می‌شود؛ زاویهٔ خارجی آن رأس نامیده می‌شود. در پنج‌ضلعی محدب روبه‌رو، زاویهٔ خارجی رأس A نشان داده شده است.



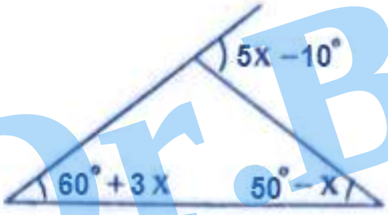
زاویهٔ خارجی مثلث

اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی در هر مثلث برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن است.



$$\hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

مثال در شکل زیر، مقدار x را مشخص کنید. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ 46 کتاب درسی)



پاسخ اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی در هر مثلث برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن است؛ بنابراین:

$$60^\circ + 3x + 50^\circ - x = 5x - 10^\circ \quad \Longrightarrow \quad 110^\circ + 2x = 5x - 10^\circ$$

$$\Longrightarrow \quad 120^\circ = 3x \quad \Longrightarrow \quad x = 40^\circ$$

مجموع زاویه‌های خارجی چندضلعی

مجموع زاویه‌های خارجی هر n ضلعی **محدب،** 360° است.

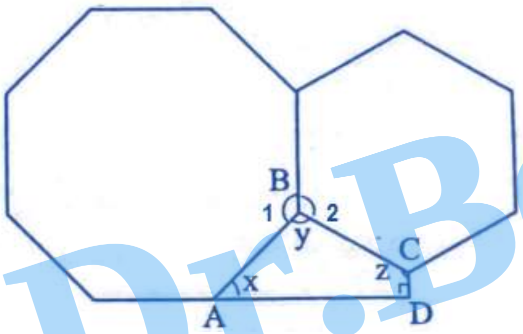
هر زاویهٔ خارجی یک چندضلعی منتظم

از آن‌جا که زوایای خارجی یک n ضلعی منتظم با هم برابرند، می‌توان گفت:

$$\frac{360^\circ}{n} =$$ اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی یک nضلعی منتظم

مثال **در شکل زیر، یک شش ضلعی منتظم و یک هشت ضلعی منتظم در یک ضلع با هم مشترک اند.**

مقادیر x، y و z را به دست آورید. (مشابه کاردرکلاس صفحهٔ 49 کتاب درسی)



پاسخ x زاویهٔ خارجی هشت‌ضلعی منتظم می‌باشد؛ بنابراین برابر است با:

$$x = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

زاویهٔ B_1 نیز زاویهٔ داخلی یک هشت‌ضلعی منتظم است و برابر است با:

$$\frac{(8-2)\times 180^\circ}{8} = 135^\circ$$

زاویهٔ B_2 زاویهٔ داخلی یک شش‌ضلعی منتظم می‌باشد و برابر است با:

$$\frac{(6-2)\times 180^\circ}{6} = 120^\circ$$

از طرفی مجموع زوایای B_1 ، B_2 برابر 360° می‌باشد؛ پس داریم:

$$135^{\circ}+120^{\circ}+y=360^{\circ} \quad \Longrightarrow \quad y=105^{\circ}$$

و در آخر می‌دانیم مجموع زوایای داخلی چهارضلعی محدب ABCD برابر با 360° است؛ بنابراین داریم:

$$x+y+z+90^{\circ}=360^{\circ} \quad \Longrightarrow \quad 45^{\circ}+105^{\circ}+z+90^{\circ}=360^{\circ} \quad \Longrightarrow \quad z=120^{\circ}$$

فصل چهارم: جبر و معادله

تبدیل عبارت کلامی به عبارت جبری و برعکس

برای تبدیل عبارت‌های کلامی به عبارت‌های جبری، به جای اعدادی که تعداد آن‌ها معلوم نیست از حروفی مانند:

x، y و ... استفاده می‌کنیم.

مثال عبارت‌های کلامی را به عبارت‌های جبری و نیز عبارت‌های جبری را به صورت کلامی بنویسید.

الف) هر عدد به توان یک، برابر خود عدد است.

ب) صفر به توان هر عدد غیرصفر، برابر صفر است.

پ) $a^{\circ} = 1(a \neq 0)$ (مشابه صفحهٔ 52 کتاب درسی)

پاسخ الف) $a^1 = a$ ب) $0^x = 0(x \neq 0)$

پ) هر عدد به جز صفر، به توان صفر، برابر یک است.

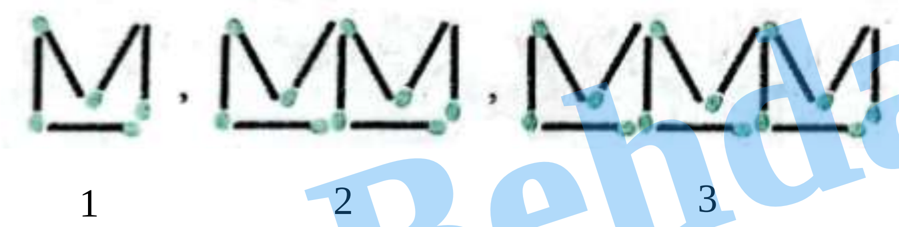
جملهٔ n اُم

برای نوشتن جملهٔ n اُم یک الگوی عددی یا هندسی، باید به هر یک از جملات آن الگو توجه کرده و رابطهٔ بین عددهای الگو با شمارهٔ هر یک از جملات را تشخیص دهیم و درنهایت، با استفاده از رابطهٔ بین جملات و شماره‌های آن‌ها، جملهٔ n اُم الگو را می‌نویسیم.

مثال جملهٔ n اُم الگوهای زیر را بنویسید.

الف) 1 , 4 , 7, ...

ب)



پاسخ در هر یک از الگوها به رابطهٔ بین جملات و شمارهٔ آن‌ها توجه کرده و داریم:

الف) الگو: $1 \quad , \quad 4 \quad , \quad 7 \quad , \quad \dots \quad , \quad 3n-2$

↓ ↓ ↓ ↓

شمارهٔ جملات: $1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 3 \qquad n$

جملهٔ n اُم: $3n-2$

ب) تعداد چوب کبریت‌های الگو: $5 \quad , \quad 9 \quad , \quad 13 \quad , \dots , \quad 4n+1$

↓ ↓ ↓ ↓

شمارهٔ جملات: $1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 3 \qquad n$

جملهٔ n اُم: $4n + 1$

یک جمله‌ای جبری

به حاصل ضربی از اعداد در توان‌های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر، یک‌جمله‌ای می‌گوییم. به طورمثال عبارت‌های $-\frac{3}{7}$ ، $\frac{3}{11}x^2y$ و z یک‌جمله‌ای هستند و عبارت‌های 2^a ، $\frac{1}{x}$ و $\sqrt{y}$ یک‌جمله‌ای نیستند.

نکته هر یک‌جمله‌ای، از دو قسمت ضریب عددی و قسمت حرفی تشکیل شده است.

$$\underbrace{-5}_{\substack{\downarrow \\ \text{ضریب عددی}}}\quad\underbrace{x^2y^3}_{\substack{\downarrow \\ \text{قسمت حرفی}}}$$

یک جمله ای های متشابه

هرگاه قسمت حرفی (متغیرها و توان‌های آن‌ها) در دو یک‌جمله‌ای یکسان باشد، به آن‌ها یک‌جمله‌ای‌های متشابه می‌گوییم. به طورمثال عبارت‌های $-3x^2y$ و $\frac{7}{5}x^2y$ مشابه هستند و عبارات $2x^2y$ و $-5xy^2$ غیرمتشابه هستند.

نکته دو یک‌جمله‌ای متشابه را می‌توان با هم جمع و تفریق کرد، برای این کار ضریب عددی آن‌ها را، با هم جمع و تفریق کرده و حاصل را در کنار قسمت حرفی قرار می‌دهیم.

$$17x^3z - 11x^3z = (17 - 11)x^3z = 6x^3z$$

نکته یک جمله‌ای‌های غیرمتشابه را نمی‌توان با هم جمع و تفریق کرد.

مثال **عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.**

$$-2x+4yx^2+6x+3yx^2-3y$$

پاسخ جملات متشابه را مشخص کرده و آن‌ها را با هم جمع و تفریق می‌کنیم:

$$\underline{-2x}+\underline{\underline{4yx^2}}+\underline{6x}+\underline{\underline{3yx^2}}-3y$$

$$=(-2+6)x+(4+3)yx^2-3y=4x+7yx^2-3y$$

ضرب یک جمله‌ای‌ها

برای ضرب یک‌جمله‌ای‌های جبری در هم، ضرایب عددی جملات در یکدیگر و قسمت حرفی جملات در یکدیگر ضرب می‌شوند.

$$-\frac{7}{3}x^3y\times 4xy^2z=-14x^4y^3z$$

ضرب چندجمله‌ای‌ها

برای ضرب دو چندجمله‌ای باید هر یک از جملات یکی از آن‌ها را در هر کدام از جملات چندجمله‌ای دیگر ضرب کنیم.

$$(5x+2xy)(7x^2y-3y^2)=35x^3y-15xy^2+14x^3y^2-6xy^3$$

مثال **عبارت جبری روبه‌رو را ساده کنید.** (مشابه صفحهٔ 55 کتاب درسی)

$(x-2y)(x+2y)-x(x+4y^2)$

پاسخ ابتدا ضرب چندجمله‌ای‌ها را انجام داده، سپس حاصل را درصورت امکان ساده می‌کنیم:

$$(x-2y)(x+2y)-x(x+4y^2)$$
$$=\cancel{x^2}+\cancel{2xy}-\cancel{2xy}-4y^2-\cancel{x^2}-4xy^2=-4y^2-4xy^2$$

گسترده‌نویسی یک عدد

می‌دانیم عبارت ab یعنی $a \times b$ ، اما اگر داشته باشیم $\overline{ab}$ ، یعنی عددی دو رقمی؛ که یکان آن b و دهگان آن a است؛ بنابراین می‌توان نوشت: $\overline{ab}=10a+b$

مقلوب یک عدد

اگر ارقام عددی را از آخر به اول بنویسیم، مقلوب آن عدد به دست می‌آید؛ بنابراین مقلوب 231 برابر 132 است و مقلوب عدد $\overline{abc}$ برابر عدد $\overline{cba}$ می‌باشد.

مثال **نشان دهید که تفاضل هر عدد دو رقمی از مقلوبش، مضرب 9 است.**

(مشابه تمرین صفحهٔ 63 کتاب درسی)

پاسخ عدد دو رقمی موردنظر را $\overline{ab}$ فرض می‌کنیم؛ بنابراین مقلوب آن $\overline{ba}$ است و داریم:

$$\overline{ab}-\overline{ba}=10a+b-(10b+a)=10a-a+b-10b$$
$$=9a-9b=9(a-b)$$

مقدار عددی یک عبارت جبری

برای محاسبهٔ مقدار یک عبارت جبری باید مقادیر داده شده را به جای متغیرها قرار داد و با توجه به اولویت انجام عملیات، حاصل عبارت را به دست آورد.

مثال مقدار عددی عبارت $-4a^2+ab^3$ را به ازای $b=-1$ و $a=2$ به دست آورید.

پاسخ مقادیر داده شده را به جای a و b در عبارت جای‌گذاری می‌کنیم و داریم:

$$-4a^2+ab^3 \xrightarrow[b=-1]{a=2} -4(2)^2+(2)(-1)^3=-16-2=-18$$

خاصیت توزیع‌پذیری

در ضرب چندجمله‌ای‌های جبری گفتیم که عبارت $a(b+c)$ را می‌توان به صورت $ab+ac$ نوشت که درحقیقت a را در هر یک از جملات عبارت داخل پرانتز ضرب کردیم؛ در واقع این کار را با استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری انجام دادیم.

خاصیت توزیع‌پذیری : $a(b+c)=ab+ac$

تجزیهٔ عبارت های جبری

برای تجزیهٔ یک عبارت جبری، عکس خاصیت توزیع پذیری عمل می کنیم یعنی عامل یا بخش مشترک دو یا چند جمله را پیدا می کنیم و بیرون پرانتز می نویسیم.

$$3a^2b^3-6ab^2=3ab^2(ab-2)$$

دقت کنید برای اطمینان از درستی تجزیه، اگر عبارت خارج از پرانتز را در هر یک از جملات داخل پرانتز ضرب کنیم به عبارت اولیه می‌رسیم.

مثال کسر مقابل را پس از تجزیه، ساده کنید.

$$\frac{ab+b^2}{ab^2+a^2b}$$

پاسخ صورت و مخرج را جداگانه بررسی کرده و با تشخیص عامل یا بخش مشترک در جملات آن‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{ab+b^2}{ab^2+a^2b}=\frac{\cancel{b}(\cancel{a+b})}{a\cancel{b}(\cancel{b+a})}=\frac{1}{a}$$

اعداد زوج و فرد

از آن‌جا که تمامی اعداد زوج مضرب 2 هستند می‌توان آن‌ها را به صورت ضرب عدد 2 در یک متغیر مثلاً به صورت 2k نشان داد و با توجه به متوالی بودن اعداد زوج و فرد می‌توانیم اعداد فرد را به صورت 2k + 1 یا 2k – 1 نشان دهیم.

نکات اعداد زوج و فرد

نکتهٔ 1 دربارهٔ جمع اعداد زوج و فرد می‌توان گفت:

الف) زوج + زوج $= 2k + 2m = 2(k + m)$ حتماً زوج است

ب) $\text{فرد} + \text{فرد} = (2k + 1) + (2m + 1) = 2(k + m + 1)$ حتماً زوج است

پ) $\text{زوج} + \text{فرد} = 2k + 2m + 1 = 2(k + m) + 1$ حتماً فرد است

نکتهٔ 2 می‌دانیم اگر عددی زوج در هر عددی ضرب شود، حاصل زوج است و برای اثبات داریم:

الف) $\text{زوج} \times \text{زوج} = 2k \times 2m = 2(2km)$ مضرب 2 است ، پس زوج است

ب) $\text{زوج} \times \text{فرد} = 2k \times (2m + 1) = 2\big(k \times (2m + 1)\big)$ مضرب 2 است، پس زوج است

معادله

معادله به یک تساوی جبری گفته می‌شود که به ازای برخی مقادیر، برقرار است؛ مانند: $2x - 1 = 5$ که به ازای $x = 3$ برقرار است.

روش حل معادله

برای حل معادله معمولاً مقادیر مجهول را در یک سمت و مقادیر معلوم (اعداد) را در سمت دیگر تساوی می‌بریم و پس از ساده کردن دو طرف، طرفین را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم تا مقدار مجهول مشخص شود.

$$2x - 1 = 5 \xrightarrow{\text{به دو طرف 1 اضافه می‌کنیم}} 2x = 6$$

$$\xrightarrow{\text{بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم}} x = \frac{6}{2} = 3$$

نکته اگر معادله دارای کسر یا ضرایب کسری باشد، می‌توان طرفین آن را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از حالت کسری خارج شود.

نکته اگر معادله به صورت دو کسر مساوی باشد می‌توانیم با استفاده از طرفین وسطین معادله را از حالت کسری خارج کنیم.

مثال **معادلات زیر را حل کنید.**

الف) $\boldsymbol{\frac{3}{2}x-5-2x=\frac{1}{3}x}$

ب) $\boldsymbol{\frac{x-3}{2}=\frac{x+4}{7}}$

پاسخ الف) برای خارج کردن معادله از حالت کسری طرفین را در ک.م.م مخرج‌ها یعنی 6 ضرب کرده و سپس معادله را حل می‌کنیم:

$$6\times\left(\frac{3}{2}x-5-2x\right)=\frac{1}{3}x\times 6 \quad\Longrightarrow\quad 9x-30-12x=2x$$

$$\Longrightarrow\quad -30=2x+12x-9x \quad\Longrightarrow\quad -30=5x \quad\Longrightarrow\quad x=-6$$

ب) با استفاده از طرفین وسطین، معادله را از حالت کسری خارج می‌کنیم:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{x+4}{7} \quad\Longrightarrow\quad 7(x-3)=2(x+4)$$

$$\xrightarrow{\text{توزیع‌پذیری}} 7x-21=2x+8 \quad\Longrightarrow\quad 7x-2x=8+21 \quad\Longrightarrow\quad 5x=29 \quad\Longrightarrow x=\frac{29}{5}$$

حل مسئله به کمک معادله

برای حل یک مسئله به کمک معادله در گام اول باید مجهول را مشخص کنیم که در بیشتر مواقع مجهول همان چیزی است که در انتهای مسئله مقدار آن را می‌خواهند؛ اما پس از شناخت مجهول باید سعی کنیم مسئله را از حالت کلامی به صورت یک تساوی جبری بنویسیم تا معادلهٔ تشکیل شده و مقدار مجهول را مشخص کنیم.

مثال اگر سه برابر عددی را با چهار برابر همان عدد جمع نموده و 6 واحد به آن اضافه کنیم، عدد 22 به دست می‌آید. آن عدد چیست؟

پاسخ عدد مورد نظر همان مجهول مسئله می‌باشد که آن را x فرض می‌کنیم و با تبدیل عبارت کلامی به تساوی جبری داریم:

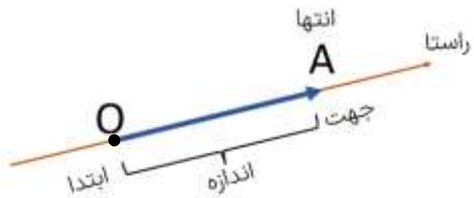
$$3x + 4x + 6 = 22 \quad \Longrightarrow \quad 7x = 22 - 6 \quad \Longrightarrow \quad 7x = 16 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{16}{7}$$

عدد مورنظر $\frac{16}{7}$ است.

فصل پنجم: بردار و مختصات

بردار

در ریاضی به پاره خط جهت‌دار، بردار می‌گوییم. هر بردار دارای سه ویژگی **راستا**، **جهت** و **اندازه** می‌باشد.



نکته هر بردار را به دو روش نام‌گذاری می‌کنند:

الف با استفاده از نقاط ابتدایی و انتهایی آن، مثلاً بردار OA.

ب با یک حرف کوچک انگلیسی، مثلاً بردار a .

مختصات یک بردار

مختصات هر بردار مشخص می‌کند برای حرکت از ابتدا تا انتهای آن باید چند واحد در راستای افقی به چپ یا راست و چند واحد در راستای عمودی به بالا یا پایین برویم:

دو واحد به چپ و سه واحد به بالا $\bar{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

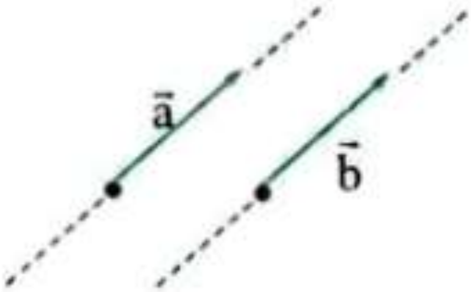
مثال کدام بردار موازی محور طول‌ها است؟

1- $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 2- $\vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ 3- $\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ 4- $\vec{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ «2» برداری موازی محور طول‌ها است که مقدار عرض مختصات آن، صفر باشد؛ یعنی در راستای عمودی جابه‌جا نشود. از بین بردارهای داده شده، بردار b این خاصیت را دارد.

بردارهای مساوی

اگر راستا، جهت و اندازهٔ بردارها یکسان باشد، آن دو بردار با یکدیگر مساوی هستند هم‌چنین **مختصات دو بردار** با یکدیگر **برابر** است.



بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مساوی هستند.

بردارهای قرینه

دو بردار که **هم‌راستا و هم‌اندازه** باشند، اما **جهت آن‌ها خلاف یکدیگر** باشد، قرینهٔ یکدیگرند.

بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ قرینهٔ یکدیگرند.

نکته اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ قرینه باشند، مختصات آن‌ها قرینهٔ یکدیگر است.

$$\vec{a} = -\vec{b} \quad \Rightarrow \quad a = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

جمع متناظر هر بردار

در هر بردار، با توجه به مختصات بردار و ابتدا و انتهای آن، می توان جمع متناظر با آن را به صورت زیر نوشت:

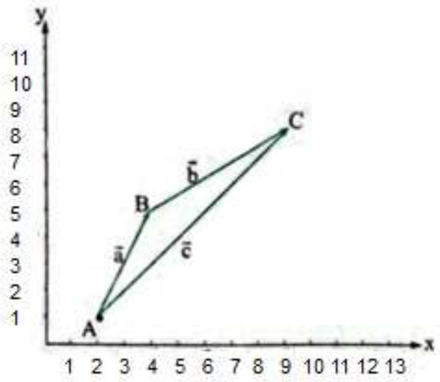
مختصات نقطهٔ انتهای بردار = مختصات بردار + مختصات نقطهٔ ابتدای بردار

به طور مثال اگر $A = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ ، آن گاه مختصات بردار AB با توجه به جمع متناظر هر بردار برابر است با :

$$A + \overrightarrow{AB} = B \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

جمع بردارها

در دستگاه مختصات زیر، از نقطهٔ A با بردار $\vec{a}$ به نقطهٔ B رفته و از نقطهٔ B با بردار $\vec{b}$ به نقطهٔ C رفته‌ایم. با کمی دقت می‌بینیم که برای انجام این کار می‌توانستیم به طور مستقیم از نقطهٔ A با بردار $\vec{c}$ به نقطهٔ C برویم؛ درحقیقت بردار $\vec{c}$ کار دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را انجام می‌دهد و می‌توان گفت بردار $\vec{c}$ ، برایند یا حاصل‌جمع بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است و می‌نویسیم: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

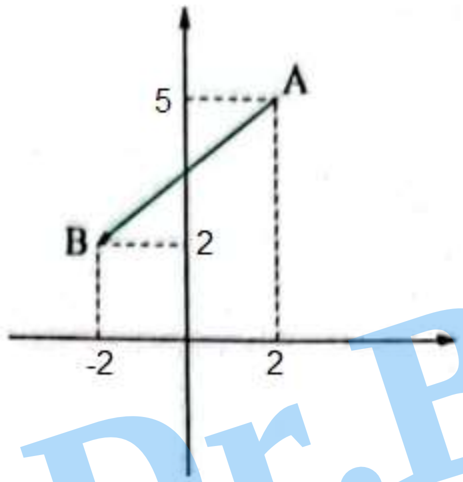


جمع مختصاتی بردار

اگر بردار c، برایند بردارهای a و b باشد، آن‌گاه با توجه به مختصات بردارهای a و b، می‌توان مختصات بردار c را به دست آورد.

$$\vec{a}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{b}=\begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}+\vec{b}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+z \\ y+t \end{bmatrix}$$

مثال با توجه به شکل:



الف) جمع متناظر با بردار AB را بنویسید.

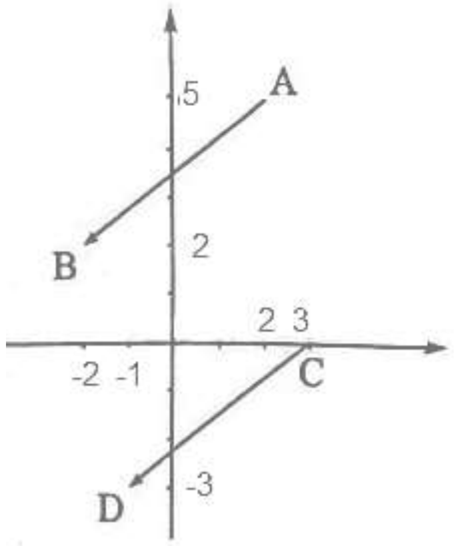
ب) از نقطهٔ $C=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$، بردار CD را مساوی بردار AB رسم کنید.

پ) جمع مختصاتی دو بردار AB و CD را به دست آورید.

پاسخ الف) مختصات نقطهٔ A برابر با $A=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ و مختصات نقطهٔ B برابر با $B=\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ و مختصات بردار AB برابر با $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ است؛ بنابراین جمع متناظر بردار AB به صورت زیر است.

$$A+\overrightarrow{AB}=B \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ب) برای رسم بردار CD مساوی با بردار AB از نقطهٔ C ، 4 واحد به سمت چپ و 3 واحد به سمت پایین رفته تا به نقطهٔ D برسیم.



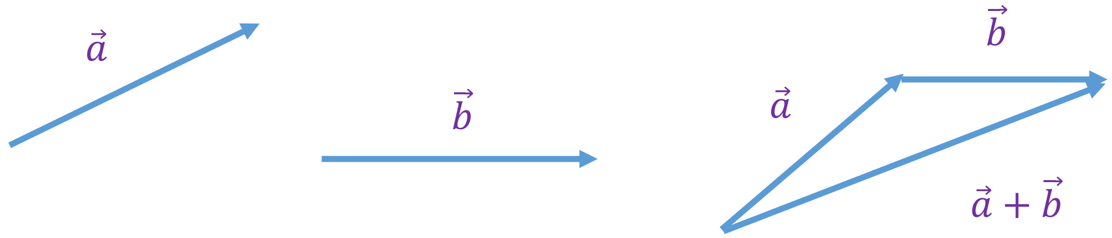
پ) برای جمع مختصاتی دو بردار AB و CD داریم:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\begin{bmatrix}-4\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\-6\end{bmatrix}$$

جمع هندسی دو بردار

الف) روش مثلثی (جمع متوالی)

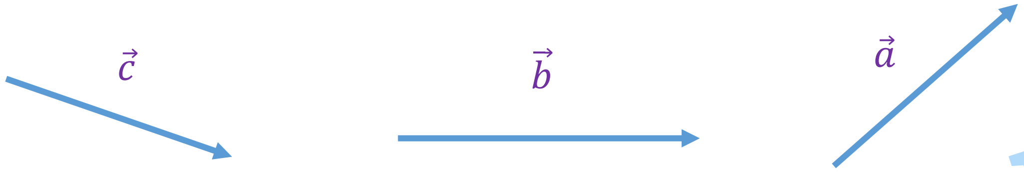
در این روش از انتهای یکی از بردارها، برداری مساوی بردار دیگر رسم کرده و برای رسم بردار حاصل جمع از ابتدای بردار اول به انتهای بردار دوم، برداری رسم می‌کنیم.



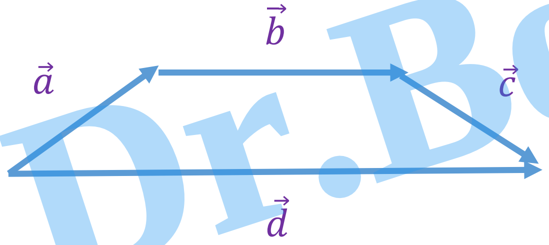
نکته با توجه به روش مثلثی، برای جمع متوالی چندین بردار کافی است آن‌ها را پشت سرهم رسم کرده، سپس از ابتدای اولین بردار به انتهای آخرین بردار، وصل کنیم.

مثال برایند بردارهای زیر را رسم کنید، سپس جمع برداری برای آن بنویسید.

(مشابه تمرین صفحهٔ 73 کتاب درسی)



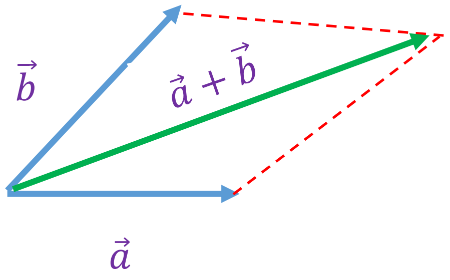
پاسخ با توجه به روش جمع متوالی، بردارهای داده شده را پشت سرهم رسم می‌کنیم. بردار برایند برداری است که از ابتدای اولین بردار به انتهای آخرین بردار رسم می‌گردد:



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

ب) روش متوازی‌الاضلاع

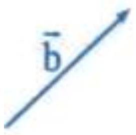
در این روش، دو بردار را از یک مبدأ مشترک (ابتدا) رسم کرده و یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهیم، در آخر، بردار حاصل جمع برابر قطری است که از مبدأ مشترک دو بردار رسم می‌شود.

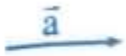


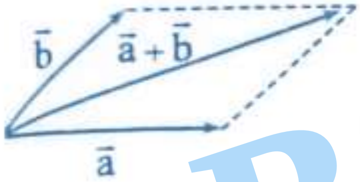
نکته اگر دو بردار از **یک نقطه** رسم شده باشند، بهتر است برای رسم برایند آن‌ها از روش متوازی‌الاضلاع استفاده کنیم.

مثال برای بردارهای a و b بردار حاصل‌جمع را به روش متوازی‌الاضلاع رسم کنید.

(مشابه کار در کلاس صفحهٔ 75 کتاب درسی)







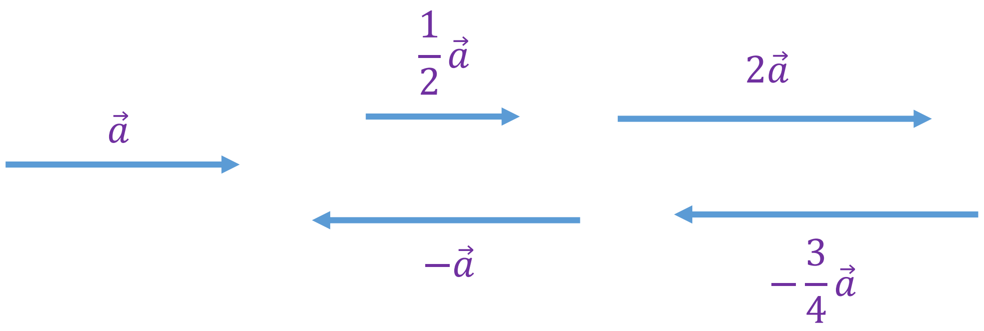
پاسخ دو بردار را از مبدأ مشترک رسم می‌کنیم و تشکیل یک متوازی‌الاضلاع می‌دهیم:

نکته برای رسم تفریق دو بردار مثلاً $\vec{a}-\vec{b}$ می‌توان بردار a را با قرینهٔ $\vec{b}$ جمع کرد:

$$\vec{a}+(-\vec{b})$$

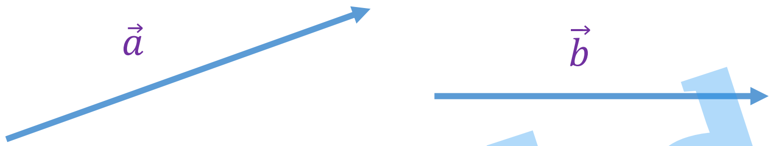
ضرب عدد در بردار

هرگاه عددی را در یک بردار ضرب کنیم، اندازهٔ آن بردار به نسبت عدد تغییر کرده و اگر عدد منفی باشد جهت بردار برعکس می‌شود.

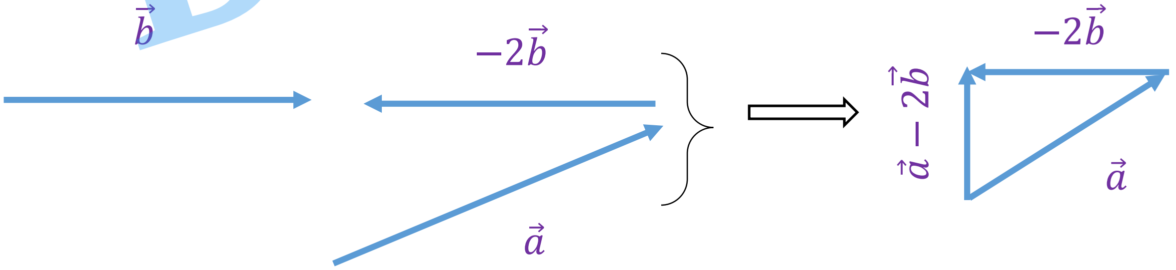


مثال با توجه به بردارهای زیر، بردار $a - 2b$ را رسم کنید.

(مشابه کاردرکلاس صفحهٔ 75 کتاب درسی)



پاسخ برای رسم بردارهای $a - 2b$ ، بردار a را با دو قرینهٔ بردار b جمع می‌کنیم: $\vec{a} + (-2\vec{b})$. برای این کار ابتدا $-2\vec{b}$ را رسم می‌کنیم:



نکته در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می‌شود.

$$k \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

مثال **مختصات بردار x را از معادلهٔ زیر پیدا کنید.**

$$-3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+2\vec{x}=\begin{bmatrix}4\\-5\end{bmatrix}$$

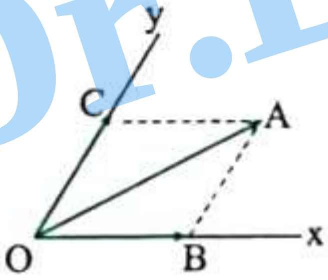
پاسخ -3 را در طول و عرض بردار $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ ضرب کرده و معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}-6\\-3\end{bmatrix}+2\vec{x}=\begin{bmatrix}4\\-5\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad 2\vec{x}=\begin{bmatrix}10\\-2\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \vec{x}=\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}$$

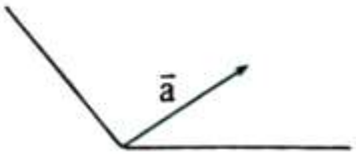
تجزیهٔ یک بردار

برای تجزیهٔ بردار OA روی محورهای Ox و Oy باید روی هر کدام از محورها بردارهایی را مشخص کنیم که حاصل جمع آن‌ها با توجه به روش متوازی‌الاضلاع برابر $\overrightarrow{OA}$ گردد. به طورمثال در شکل زیر داریم:

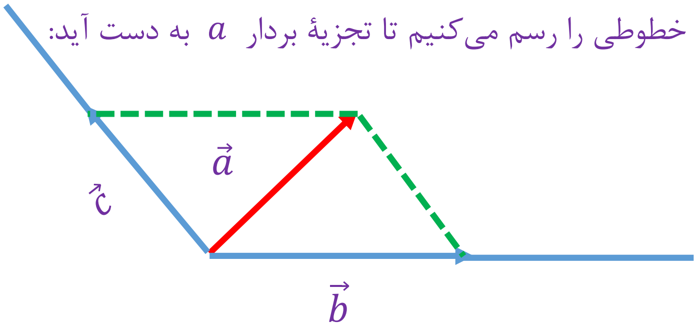
$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}$ که $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OB}$ به ترتیب، تجزیه‌شدهٔ $\overrightarrow{OA}$ روی محورهای Ox و Oy هستند.



مثال **بردار a را در راستای داده شده تجزیه کنید.**



پاسخ برای تجزیهٔ بردار a در راستاهای داده شده باید بردارهایی را پیدا کرد که مجموع آن‌ها برابر $\vec{a}$ باشد. برای این کار از انتهای $\vec{a}$ موازی محورهای داده شده خطوطی را رسم می‌کنیم تا تجزیهٔ بردار a به دست آید:



$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

بردارهای واحد مختصات

بردار $\vec{\imath} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ در راستای محور طول‌ها و بردار $\vec{\jmath} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ در راستای محور عرض‌ها را بردارهای واحد مختصات می‌گوییم. هر برداری در صفحهٔ مختصات را می‌توان برحسب بردارهای $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ نوشت:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$$

مثال در معادلهٔ برداری زیر، مقدار $\vec{x}$ را به دست آورید. (منطقه 4 تهران)

$$2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{x} = 4\vec{\imath} - \begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$$

پاسخ با جای‌گذاری $\vec{\imath} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و $\vec{\jmath} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ داریم:

$$2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + 2\vec{x} = 4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

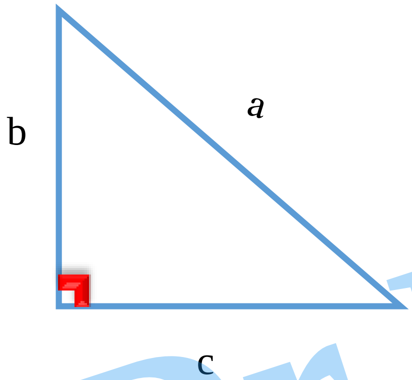
$$\Rightarrow \quad 2\vec{x} = \begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

فصل ششم: مثلث

رابطهٔ فیثاغورس

رابطهٔ فیثاغورس بیان می‌کند که در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

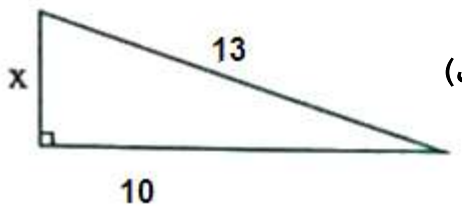


نکته عکس رابطهٔ فیثاغورس هم درست است؛ یعنی اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر باشد، آن مثلث، قائم‌الزاویه است.

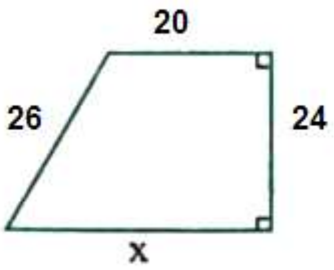
نکته به اعدادی که اندازه‌های اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه باشند، اعداد فیثاغورسی می‌گوییم.

مثال مقدار x را در هر یک از شکل‌های زیر به دست آورید. (مشابه کاردرکلاس صفحه 86 کتاب درسی)

الف)



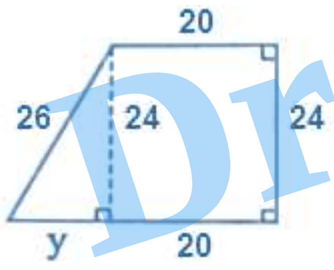
ب)



پاسخ الف) با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$13^2 = 10^2 + x^2 \quad \Longrightarrow \quad 169 = 100 + x^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 69 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{69}$$

ب) ابتدا مثلث قائم‌الزاویهٔ نشان داده شده را در شکل تشکیل می‌دهیم و داریم:

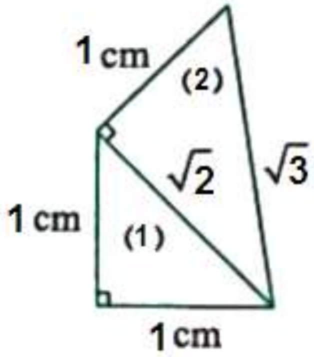


$$26^2 = 24^2 + y^2 \Longrightarrow 676 = 576 + y^2$$
$$\Longrightarrow \quad y^2 = 100 \Longrightarrow y = 10$$
$$x = 20 + y \Longrightarrow x = 30$$

نکته برای رسم پاره‌خط‌هایی که طول آن‌ها عددی گویا نمی‌باشد مانند $\sqrt{10}$، می‌توانیم با تشکیل مثلث‌های قائم‌الزاویه، در یک مرحله یا به صورت متوالی و استفاده از رابطهٔ فیثاغورس پاره‌خط موردنظر را رسم کنیم.

مثال **پاره‌خطی به طول $\sqrt{3}$ سانتی‌متر رسم کنید.** (مشابه کاردرکلاس صفحهٔ 87 کتاب درسی)

پاسخ با ساختن مثلث‌های قائم‌الزاویه داریم:



وتر مثلث (1): $1^2 + 1^2 = \sqrt{2}$

وتر مثلث (2): $1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{3}$

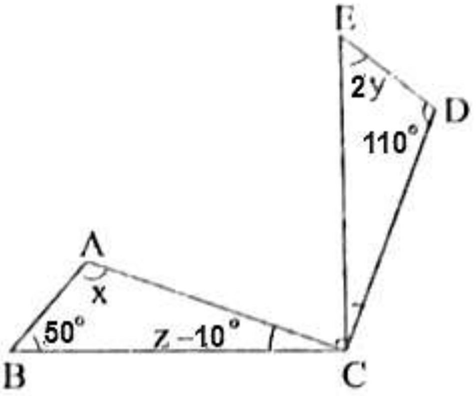
شکل‌های هم‌نهشت

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بپوشانند، می‌توانیم بگوییم که این دو شکل با یکدیگر هم‌نهشت‌اند.

نکته اگر دو شکل با یکدیگر هم‌نهشت باشند آن‌گاه زاویه‌های نظیر با هم و ضلع‌های نظیر با هم برابر هستند.

مثال **الف) مثلث ABC و مثلث CDE هم‌نهشت هستند. با چه تبدیلی مثلث ABC بر مثلث CDE منطبق می‌شود؟**

ب) مقادیر x ، y و z را به دست آورید.



پاسخ الف) با دوران 90° حول نقطهٔ C و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (ساعتگرد) مثلث ABC بر مثلث CDE منطبق می‌شود.

ب) از تساوی اجزای نظیر دو مثلث داریم:

$$\left.\begin{aligned}&\hat{B}=\hat{E}=2y \quad \Rightarrow y=25^\circ\\&\hat{A}=\hat{D}=110^\circ \quad \Rightarrow x=110^\circ\end{aligned}\right\}\Rightarrow 180^\circ-(\hat{D}+\hat{E})=\hat{C}$$

$$\Rightarrow \quad 180^\circ-160^\circ=20^\circ=\hat{C} \quad \Rightarrow \quad \hat{C}=z-10^\circ=20^\circ \quad \Rightarrow \quad z=30^\circ$$

مثلث‌های هم‌نهشت

در حالت کلی، دو مثلث در سه حالت با یکدیگر هم‌نهشت هستند:

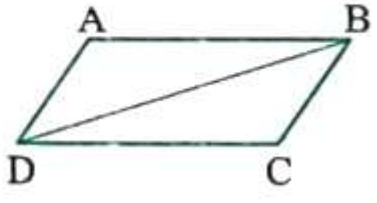
الف) برابری سه ضلع (ض‌ض‌ض)

اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند، دو مثلث هم‌نهشت هستند.

مثال در متوازی‌الاضلاع ABCD، قطر BD را رسم می‌کنیم. دلیل هم‌نهشتی دو مثلث ایجاد شده را بنویسید. (مشابه تمرین صفحهٔ 95 کتاب درسی)

پاسخ در متوازی‌الاضلاع ABCD، قطر BD را رسم می‌کنیم؛ داریم:

$$\left.\begin{aligned}&AB=DC \quad \text{اضلاع روبه‌رو}\\&AD=BC \quad \text{اضلاع روبه‌رو}\\&BD \quad \text{ضلع مشترک}\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \underset{ABD}{\Delta}\cong\underset{BCD}{\Delta}$$



ب) برابری دو ضلع و زاویهٔ بین (ض‌زض)

اگر دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از مثلثی با دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از مثلث دیگر مساوی باشند، دو مثلث هم‌نهشت هستند.

مثال در مثلث متساوی‌الساقین ABC، داریم: AB = Ac. نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم. دلیل هم‌نهشتی دو مثلث ایجاد شده را بنویسید. (مشابه کاردرکلاس صفحهٔ 94 کتاب درسی)

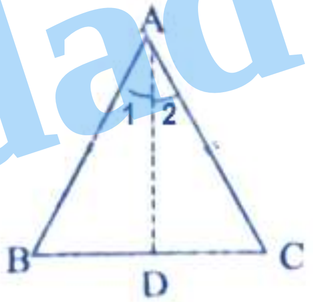
پاسخ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم؛ داریم:

AB = AC طبق فرض

AD ضلع مشترک

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ نیمساز است AD

$$\xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ACD}$$

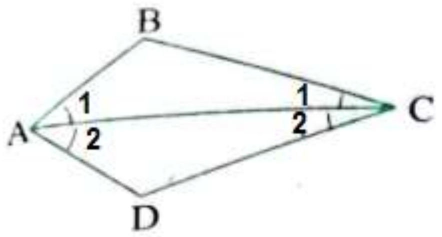


پ) برابری دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز)

اگر دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلث دیگری مساوی باشند، دو مثلث هم‌نهشت هستند.

مثال در چهار ضلعی ABCD شکل زیر، AC نیمساز زوایای BAD و BCD می‌باشد. دلیل هم‌نهشتی دو مثلث را بنویسید.

(مشابه کاردرکلاس صفحهٔ 93 کتاب درسی)



پاسخ با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ \hat{C}_1=\hat{C}_2\\ \text{ضلع مشترک } AC\end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{زضز})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC}$$

هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه

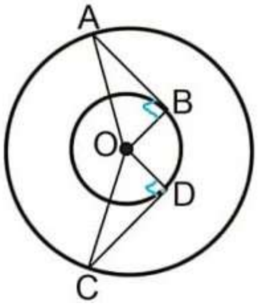
علاوه بر حالات کلی هم‌نهشتی دو مثلث، برای هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه دو حالت دیگر می‌توان ذکر کرد:

الف) برابری وتر و یک ضلع (وض)

هرگاه وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه از مثلثی با وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه از مثلث دیگر مساوی باشند، دو مثلث هم‌نهشت هستند.

مثال در شکل زیر، نقطهٔ O مرکز مشترک دو دایره است و پاره‌خط‌های AB و CD به ترتیب بر OB و OD عمودند. دلیل هم‌نهشتی مثلث‌های $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{OCD}$ بنویسید.

(مشابه تمرین صفحهٔ 99 کتاب درسی)



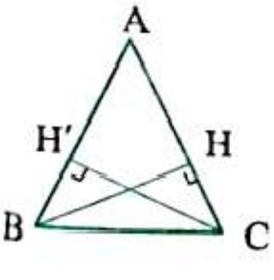
پاسخ با توجه به قائم‌الزاویه بودن مثلث‌های شکل، می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{D}=90^\circ \\ OA=OC\ \ \text{شعاع دایرهٔ بزرگ}\ (\text{وتر}) \\ OB=OD\ \ \text{شعاع دایرهٔ کوچک}\end{array}\right\}\xrightarrow{(\text{وض})}\overset{\Delta}{OAB}\cong\overset{\Delta}{OCD}$$

ب) برابری وتر و یک زاویهٔ تند (وز)

هرگاه وتر و یک زاویهٔ تند از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک زاویهٔ تند از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر، مساوی باشند، دو مثلث هم‌نهشت هستند.

مثال در مثلث متساوی‌الساقین ABC زیر، $AB = AC$ است و ارتفاع‌های وارد بر دو ساق رسم شده‌اند. دلیل هم‌نهشتی مثلث‌های CHB و $BH'C$ را بنویسید.



پاسخ با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC می‌توان گفت: $\hat{B}=\hat{C}$ و داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}=\hat{H}'=90^{\circ}\\ \hat{B}=\hat{C}\\ BC\ (\text{وتر})\ \text{ضلع مشترک}\end{array}\right\}\xrightarrow{(\text{وز})}\overset{\Delta}{BH'C}\cong\overset{\Delta}{CHB}$$

فصل هفتم: توان و جذر

توان

هرگاه یک عدد مانند a را به تعداد n بار در خودش ضرب کنیم، می‌گوییم a به توان رسیده است و داریم:

$$\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ \text{بار}} = \underset{\text{پایه}}{a}^{\overset{\text{توان}}{n}}$$

تذکر هر عدد (غیرصفر) به توان صفر، برابر یک است. $5^0 = 1\ ,\quad (-3)^0 = 1$

نکتهٔ 1 اگر اعداد منفی به توان عددی زوج برسند، حاصل مثبت است و اگر به توان عددی فرد برسند، حاصل منفی است.

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$$

نکتهٔ 2 دقت کنید حاصل عبارت‌های $(-2)^4$ و -2^4 با یکدیگر متفاوت است؛ زیرا داریم:

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$$

$$-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$$

توان اعداد توان دار

پرانتزی دارای توان باشد و داخل آن، یک عدد توان‌دار داشته باشیم، توان‌ها را هم ضرب می‌کنیم:

$$(a^m)^n = a^{mn} \xrightarrow{\text{مثال}} (5^7)^3 = 5^{21}$$

نکته اگر پرانتزی دارای توان باشد و داخل آن بین عبارت‌ها ضرب و تقسیم باشد و نه جمع و تفریق، آن‌گاه مجاز هستیم توان پرانتز را در توان هر یک از اعداد داخل پرانتز ضرب کنیم.

$$(ab)^m = a^m \times b^m \xrightarrow{\text{مثال}} \begin{cases} (5^3 \times 2)^4 = 5^{12} \times 2^4 \\ \left(\dfrac{2}{5^3}\right)^2 = \dfrac{2^2}{5^6} \end{cases}$$

تغییر ظاهر اعداد توان دار

برای تغییر در ظاهر اعداد توان‌دار، می‌توانیم در صورت امکان پایه را به صورت یک عدد توان‌دار داخل پرانتز نوشته و توان قبلی را به صورت توان پرانتز قرار دهیم.

$$9^5 = (3^2)^5 = 3^{10} \quad . \quad \left(\frac{27}{125}\right)^2 = \left(\frac{3^3}{5^3}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^6$$

ضرب اعداد توان دار

الف) اگر پایه‌ها مساوی باشند، یکی از پایه‌ها را نوشته و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \xrightarrow{\text{مثال}} 8^2 \times 2^3 = (2^3)^2 \times 2^3 = 2^6 \times 2^3 = 2^9$$

ب) اگر توان‌ها مساوی باشند، یکی از توان‌ها را نوشته و پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$a^m \times a^n = (a \times b)^m$$

$$\xrightarrow{\text{مثال}} \quad (-8)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(-8 \times \frac{1}{2}\right)^4 = (-4)^4$$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عدد یا عبارتی توان‌دار بنویسید.

الف) $\mathbf{9^5 \times 18^4 \times 2^5}$

ب) $\mathbf{(xy)^3 \times 2x^2y}$

پاسخ الف) با تغییر در پایه‌ها داریم:

$$9^5 \times 18^4 \times 2^5 = 9^5 \times (2 \times 9)^4 \times 2^5 = 9^5 \times 9^4 \times 2^4 \times 2^5$$
$$= 9^9 \times 2^9 = 18^9$$

ب) توان عبارت $(xy)^3$ را در توان هر یک از متغیرها ضرب کرده و داریم:

$$(xy)^3 \times 2x^2y^2 = x^3 \times y^3 \times 2x^2y^2 = 2x^5y^5$$

نکته اگر چند عدد توان‌دار یکسان با هم جمع شده باشند می‌توانیم جمع را به ضرب تبدیل کنیم و سپس حاصل عبارت را به دست بیاوریم.

$$a^m + a^m + a^m + a^m = 4 \times a^m$$

مثال حاصل عبارت مقابل را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

(مشابه تمرین صفحهٔ 105 کتاب درسی)

پاسخ جمع اعداد توان‌دار داده شده را به ضرب تبدیل می‌کنیم و داریم:

$$3^5 + 3^5 + 3^5 = 3 \times 3^5 = 3^6$$

تقسیم اعداد توان دار

الف) اگر پایه‌ها مساوی باشند، یکی از پایه‌ها را نوشته و توان‌ها را از یکدیگر کم می‌کنیم.

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad \xrightarrow{\text{مثال}} \quad \frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$$

ب) اگر توان‌ها مساوی باشند، یکی از توان‌ها را نوشته و پایه‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad , \quad (b \neq 0)$$

$$\xrightarrow{\text{مثال}} \quad \frac{(-8)^5}{4^5} = \left(\frac{-8}{4}\right)^5 = (-2)^5$$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عدد یا عبارتی توان‌دار بنویسید.

(مشابه تمرین صفحهٔ 109 کتاب درسی)

الف) $\frac{6^7 \times 3^7}{36^5 \div 2^5}$ ب) $\frac{(a^2)^5 \times a^7}{a^{11}}$

پاسخ الف) با استفاده از قوانین ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار داریم:

$$\frac{6^7 \times 3^7}{36^5 \div 2^5} = \frac{18^7}{18^5} = 18^2$$

ب) ابتدا عبارت $(a^2)^5$ را به صورت a^{10} می‌نویسیم و سپس:

$$\frac{(a^2)^5 \times a^7}{a^{11}} = \frac{a^{10} \times a^7}{a^{11}} = \frac{a^{17}}{a^{11}} = a^6$$

جذر گرفتن

جذرگرفتن، عکس عمل مجذور کردن است. می‌دانیم مجذور 5 و 5− هر دو برابر 25 می‌باشد؛ بنابراین ریشهٔ دوم 25 برابر 5 و 5− است.

نکته برای نمایش ریشهٔ دوم مثبت از نماد $\sqrt{\ }$ (رادیکال) استفاده می‌کنیم؛ بنابراین: $\sqrt{25} = +5$

جذر تقریبی

می‌دانیم بعضی از اعداد مانند 9، 16، 25 و ... که مجذور کامل هستند دارای جذر دقیق می‌باشند؛ اما برای محاسبهٔ جذر اعدادی مانند 11، 17، 30 و ... از آن‌جا که مجذور کامل نمی‌باشند مجبور به محاسبهٔ تقریبی جذر آن‌ها هستیم. برای محاسبهٔ جذر تقریبی گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام 1 مشخص می‌کنیم عدد زیر رادیکال بین مجذور کدام دو عدد طبیعی متوالی می‌باشد. به طورمثال $\sqrt{11}$ را درنظر بگیرید:

$$\sqrt{11}: 9 < 11 < 16 \quad \Rightarrow \quad 3 < \sqrt{11} < 4$$

بنابراین $\sqrt{11}$ بین 3 و 4 قرار دارد.

گام 2 همان‌طور که $9 < 11 < 16$ در مرحلهٔ قبل مشخص است، $\sqrt{11}$ به 3 نزدیک‌تر است؛ بنابراین برای محاسبهٔ جذر تقریبی $\sqrt{11}$ تا یک رقم اعشار جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

3.4	3.3	3.2	3.1	**عدد**
11.56	10.89	10.24	9.61	**مجذور**

گام 3 همان‌طور که از جدول بالا مشخص است مجذور 3.3 به 11 نزدیک‌تر از مجذور بقیهٔ اعداد است؛ بنابراین جذر تقریبی $\sqrt{11}$ تا یک رقم اعشار تقریباً برابر 3.3 می‌باشد.

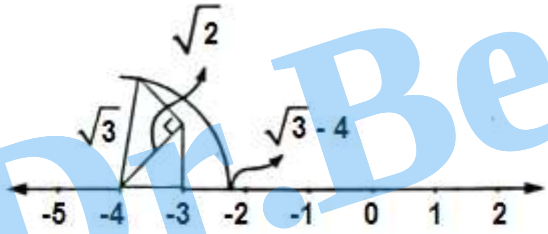
نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد

برای نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد با کمک یک یا چند مثلث قائم‌الزاویه و نیز رابطهٔ فیثاغورس یک پاره‌خط به اندازهٔ رادیکال مورد نظر رسم می‌کنیم. اگر علامت پشت رادیکال مثبت بود به سمت راست و اگر علامت پشت رادیکال منفی بود به سمت چپ کمان می‌زنیم.

نکته اگر عددی با رادیکال جمع یا تفریق شده بود مثلاً $2+\sqrt{3}$ ، به جای صفر از عدد مورد نظر پاره‌خطی به طول عدد رادیکالی رسم کرده و سپس کمان می‌زنیم.

مثال عدد $\sqrt{3}-4$ را روی محور اعداد نمایش دهید. (مشابه کاردرکلاس صفحهٔ 114 کتاب درسی)

پاسخ از نقطهٔ -4 با استفاده از دو مثلث قائم‌الزاویه به صورت روبه‌رو، پاره‌خطی به طول $\sqrt{3}$ رسم کرده و کمان می‌زنیم:



خواص ضرب رادیکال ها

1) اگر دو رادیکال در هم ضرب شوند می‌توانیم اعداد آن‌ها را به شکل ضرب زیر یک رادیکال بنویسیم.

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$$

2) اگر دو یا چند عدد زیر رادیکال در هم ضرب شده باشند به شرط این که دو عدد مثبت باشند می‌توانیم به صورت ضرب چند رادیکال آن‌ها را از هم جدا کنیم.

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\ \times\sqrt{b} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{15}=\sqrt{3}\times\sqrt{5}$$

خواص تقسیم رادیکال ها

1- اگر دو رادیکال بر هم تقسیم شده باشند می‌توانیم اعداد آن‌ها را به شکل کسر زیر یک رادیکال بنویسیم.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}} \quad , \quad (b \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{28}{14}}$$

2- اگر دو عدد زیر رادیکال بر هم تقسیم شده باشند به شرط این که دو عدد **مثبت** باشند می‌توانیم آن‌ها را به صورت تقسیم دو رادیکال از هم جدا کنیم.

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad (b \neq 0) \quad \Rightarrow \sqrt{\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$$

نکته اگر دو عدد زیر رادیکال با هم جمع یا تفریق شده باشند **به هیچ‌وجه** نمی‌توان آن‌ها را به صورت دو رادیکال از هم جمع یا تفریق کرد.

$$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{16 \pm 9} \neq \sqrt{16} \pm \sqrt{9}$$

مثال **حاصل عبارت روبه‌رو را به دست آورید.** (مشابه تمرین صفحهٔ 117 کتاب درسی)

$$\sqrt{\frac{\mathbf{49 \times 27}}{\mathbf{64}}}$$

پاسخ با توجه به خواص ضرب و تقسیم رادیکال‌ها داریم:

$$\sqrt{\frac{49 \times 27}{64}}=\frac{\sqrt{49} \times \sqrt{3 \times 9}}{\sqrt{64}}=\frac{7 \times \sqrt{3} \times \sqrt{9}}{8}=\frac{21\sqrt{3}}{8}$$

فصل هشتم: آمار و احتمال

علم آمار: علم آمار، علم جمع‌آوری، سازماندهی، تحلیل و تفسیر اطلاعات است.

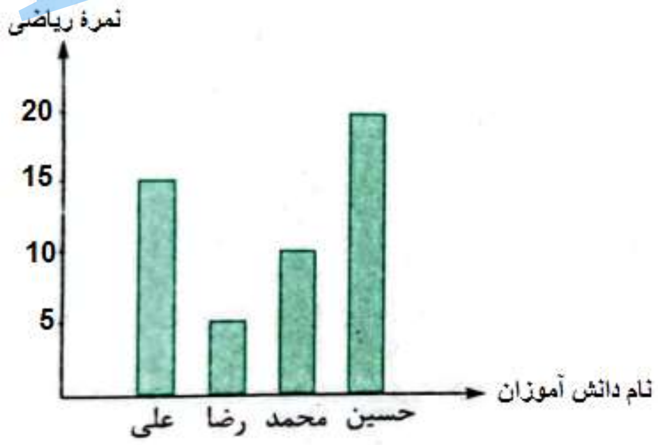
داده‌های آماری: اطلاعات جمع‌آوری شده در علم آمار را داده‌های آماری می‌گوییم.

نمودارها

برای مقایسه و بررسی بهتر داده‌های آماری با توجه به موضوعی که داده‌های آن جمع‌آوری شده، نوع اطلاعات به دست آمده و هدف آمارگیری از انواع نمودارهای زیر استفاده می‌کنیم:

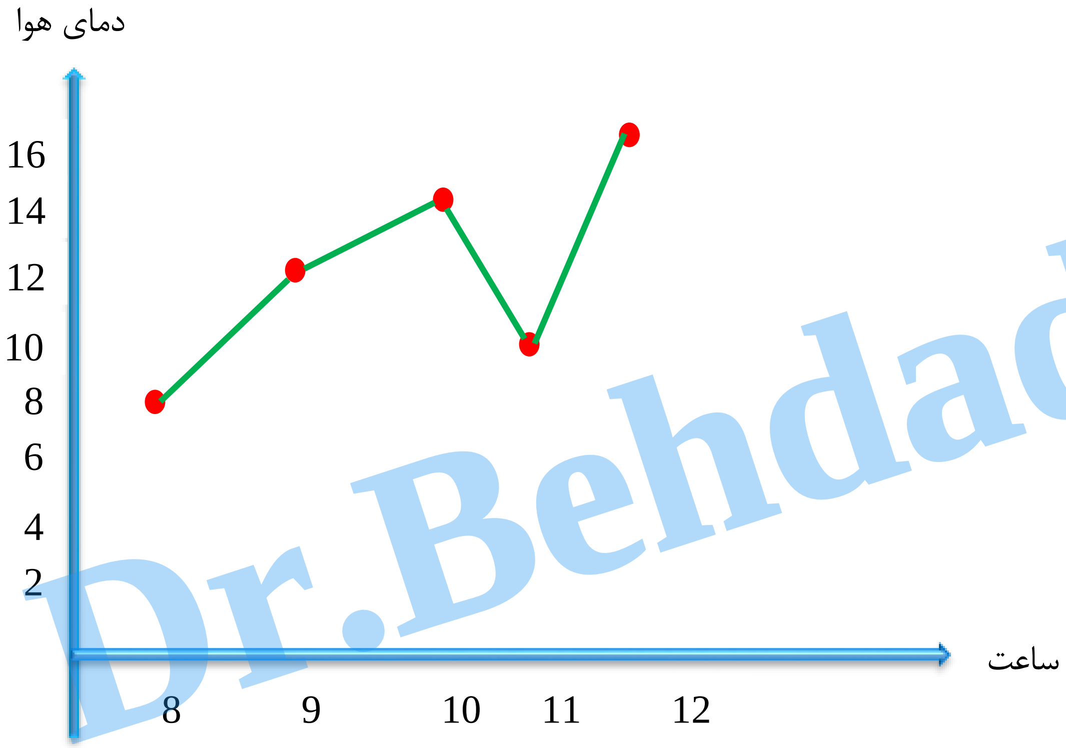
الف) نمودار میله ای (ستونی)

نمودار میله‌ای با هدف مقایسهٔ داده‌ها و پیدا کردن بیش‌ترین و کم‌ترین داده به کار می‌رود. به طورمثال نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهندهٔ نمرات ریاضی، چهار نفر در یک آزمون می‌باشد.



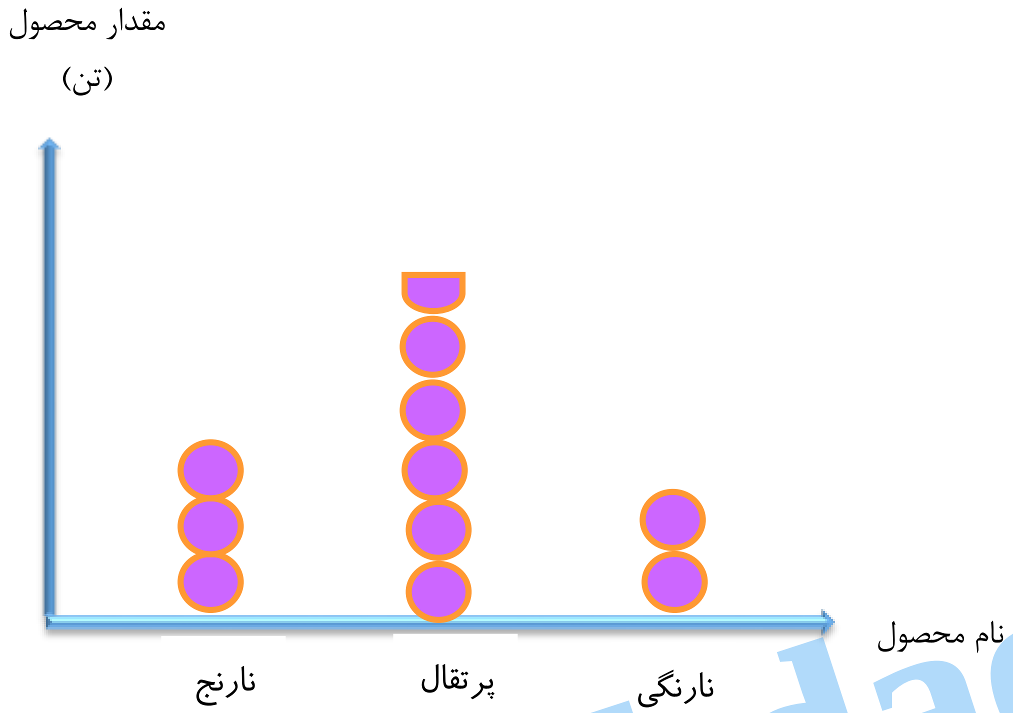
ب) نمودار خط شکسته

نمودار خط شکسته برای نمایش تغییرات کاربرد دارد. به طورمثال نمودار خط شکستهٔ روبه‌رو نشان‌دهندهٔ تغییرات دمای استان تهران از ساعت 8 تا 12 می‌باشد.



پ) نمودار تصویری

نمودار تصویری برای مقایسهٔ تقریبی عددها و مقدارهای بزرگ کاربرد دارد. به طور مثال، نمودار تصویری زیر، نشان‌دهندهٔ محصولات میوهٔ یک استان بوده هر ○ نشان‌دهندهٔ 5 تن می‌باشد.



ت) نمودار دایره ای

نمودار دایره‌ای برای نشان دادن نسبت هر بخش از کل می‌باشد. معمولاً اطلاعات عددی روی نمودار دایره‌ای به صورت درصد می‌باشند. به طورمثال نمودار دایره‌ای روبه‌رو نشان‌دهندهٔ انواع کتاب‌های موجود و درصد آن‌ها در یک کتابخانه می‌باشد.

مثال هر یک از جمله‌های ستون A را به نمودار مناسب از ستون B وصل کنید.

A	B
1) نمایش میزان بارندگی شهرهای شمالی کشور	نمودار دایره‌ای
2) نشان دادن مساحت زیرکشت نسبت به کل زمین کشاورزی	نمودار خط شکسته
3) نشان دادن بیشترین تغییر نمرات علی در طول دو ماه متوالی	نمودار تصویری
4) نمایش مقدار تولید سیب‌زمینی در استان‌های مختلف	نمودار میله‌ای

پاسخ برای عبارت (1) که هدف، نمایش میزان بارندگی است، نمودار میله‌ای مناسب است، عبارت (2) که به دنبال نمایش مساحت زیر کشت نسبت به کل زمین کشاورزی هستیم نمودار دایره‌ای مناسب است، عبارت (3) که به دنبال نمایش تغییرات هستیم نمودار خط شکسته مناسب است. در عبارت (4) از آن‌جا که مقدار تولید سیب‌زمینی هر استان عددی بزرگ است و مقدار آن را به صورت تقریبی اعلام می‌کنیم، نمودار تصویری مناسب‌تر است.

محدودهٔ اعداد

کمیت‌های «<» و «≤» با یکدیگر متفاوت هستند. به طورمثال $x < 2$ به معنای مقادیری است که از 2 کوچک‌تر هستند ولی اگر داشته باشیم: $x \leq 2$ ، یعنی مقادیر موردنظر کوچک‌تر یا مساوی 2 هستند.

مثال **اگر x عددی صحیح و $-1 \leq x < 4$ باشد، برای x چند مقدار مختلف وجود دارد؟**

(مشابه فعالیت صفحهٔ 121 کتاب درسی)

پاسخ با توجه به محدودهٔ $-1 \le x < 4$ ، x اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی -1 و کوچک‌تر از 4 می‌باشد؛ بنابراین x می‌تواند مقادیر $1-$ ، 0 ، 1 ، 2 و 3 باشد. پس 5 مقدار مختلف برای x وجود دارد.

دسته‌بندی داده‌ها

اگر داده‌های جمع‌آوری شده در یک موضوع آماری، زیاد و پراکنده باشند، برای این که بتوانیم آسان تر و بهتر نتیجه بگیریم، داده‌ها را متناسب با موضوع آماری دسته‌بندی می‌کنیم.

دامنهٔ تغییرات

اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین داده در بین داده‌های آماری را دامنهٔ تغییرات می‌نامیم.

مشخص کردن طول دسته ها

در دسته‌بندی داده‌ها، اگر بخواهیم طول دسته‌ها مساوی باشند، دامنهٔ تغییرات را بر تعداد دسته‌ها تقسیم می‌کنیم تا طول دسته‌ها به دست بیاید.

حدود هر یک از دسته‌ها

برای مشخص کردن حدود هر یک از دسته‌ها، از کم‌ترین داده شروع کرده و به آن طول دسته را اضافه می‌کنیم تا عدد بالای دستهٔ اول به دست آمده و عدد بالای هر دسته را به عنوان عدد پایین دستهٔ بعدی درنظر می‌گیریم تا تمامی دسته‌ها مشخص گردند.

نکته در تمامی دسته‌ها، برای نوشتن حدود دسته برای عدد پایین هر دسته علامت «≤» و برای عدد بالای هر دسته علامت «>» را قرار می‌دهیم. فقط در دستهٔ آخر برای عدد بالایی نیز، علامت «≤» را قرار می‌دهیم.

فراوانی

به تعداد داده‌های موجود در هر دسته، فراوانی آن دسته می‌گوییم که برای نمایش آن از چوب‌خط (خط نشان) استفاده می‌کنیم.

مثال نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس 25 نفری به صورت زیر است. داده‌ها را به 5 دسته با طول مساوی تقسیم کنید و جدول فراوانی و نمودار ستونی آن را رسم کنید.

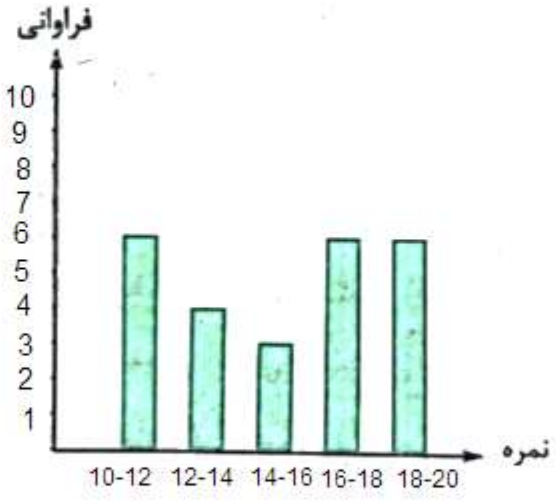
(مشابه تمرین صفحهٔ 123 کتاب درسی)

10, 10.5 , 18 , 17, 10.5 , 11 , 20 , 14 , 10 , 16 , 15 , 16 , 17 , 11 , 19
20, 17.5 , 19.5 , 16.5 , 13 , 12 , 13.5 , 18.5 , 15 , 12

پاسخ ابتدا دامنهٔ تغییرات را به دست آورده، سپس با مشخص کردن طول هر دسته، حدود هر دسته را مشخص می‌کنیم و جدول فراوانی و نمودار ستونی را رسم می‌کنیم:

طول هر دسته : $\frac{\text{دامنهٔ تغییرات}}{\text{تعداد دسته}} = \frac{10}{5} = 2$ دامنهٔ تغییرات : $20 - 10 = 10$

فراوانی	چوب‌خط	حدود دسته‌ها
6	𝍸/	$10 \leq x < 12$
4	////	$12 \leq x < 14$
3	///	$14 \leq x < 16$
6	𝍸/	$16 \leq x < 18$
6	𝍸/	$18 \leq x \leq 20$



میانگین داده ها

اگر مجموع داده‌ها را بر تعداد آن‌ها، تقسیم کنیم، میانگین داده‌ها به دست می‌آید و به صورت جبری داریم:

$s \to$ مجموع داده ها

میانگین $\leftarrow \bar{x} = \frac{s}{n}$

$n \to$ تعداد داده ها

نکته با توجه به رابطهٔ بالا می‌توان گفت مجموع داده‌ها برابر حاصل‌ضرب تعداد داده‌ها در میانگین $(n \times \bar{x})$ است

و تعداد داده‌ها برابر تقسیم مجموع داده‌ها بر میانگین ($\frac{s}{\bar{x}}$) می‌باشد.

مثال میان نمره‌های 8 درس علی 16.5 شده است. اگر نمره‌های دو درس دیگر او که 17 و 15 است به این داده‌ها اضافه شوند، میانگین جدید نمره‌های علی را حساب کنید.

پاسخ مجموع نمرات علی در 8 درس برابر $8 \times 16.5 = 132$ می‌باشد که اگر نمره‌های دو درس دیگر را به آن اضافه کنیم برابر 164 می‌شود و میانگین جدید برای 10 درس برابر است با:

$$\text{میانگین جدید} = \frac{164}{10} = 16.4$$

مرکز دسته

مرکز هر دسته برابر میانگین عدد بالایی و عدد پایینی آن دسته می‌باشد. به طور مثال مرکز دستهٔ $14 \le x < 18$ برابر $\frac{14+18}{2}$ است.

نکته اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد و داده‌ها دسته‌بندی شده باشند، می‌توان میانگین را به صورت مقابل به دست آورد.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}\left(\text{فراوانی} \times \text{مرکز دسته}\right)}{\text{مجموع فراوانی‌ها}}$$

مثال **جدول زیر را کامل و میانگین را تا یک رقم اعشار حساب کنید.**

فراوانی × مرکز دسته	مرکز دسته	فراوانی	حدود دسته
		11	$6 \le x < 12$
150			$12 \le x \le 18$
		21	مجموع

پاسخ با توجه به مجموع فراوانی‌ها می‌توان گفت فراوانی دستهٔ $12 \le x \le 18$ برابر 10 است و مرکز دستهٔ آن برابر $15 = \frac{12+18}{2}$ می‌باشد. همچنین مرکز دستهٔ $6 \le x < 12$ برابر 9 است و حاصل فراوانی × مرکز دستهٔ آن برابر 99 می‌باشد؛ بنابراین میانگین برابر است با:

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}\left(\text{فراوانی} \times \text{مرکز دسته}\right)}{\text{مجموع فراوانی‌ها}} = \frac{99 + 150}{21} \simeq 11.8$$

احتمال

به نسبت تعداد حالت‌های (پیشامدهای) مطلوب به تعداد همهٔ حالت‌های (پیشامدهای) ممکن، احتمال رخ دادن هر پیشامد می‌گوییم.

$$\text{احتمال رخ دادن هر پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

نکته احتمال رخ دادن هر پیشامد را با یک کسر که بین صفر و یک است، نشان می‌دهیم.

پیشامد قطعی

اگر پیشامدی حتماً رخ دهد به آن پیشامد حتمی (قطعی) می‌گوییم و احتمال وقوع آن یک است به طورمثال احتمال آمدن شب پس از روز، یک پیشامد حتمی است.

پیشامد غیر ممکن

اگر پیشامدی به هیچوجه رخ ندهد به آن پیشامد غیرممکن (محال) می‌گوییم و احتمال وقوع آن صفر است. به طور مثال احتمال آمدن عدد 2 رقمی در پرتاب یک تاس، یک پیشامد غیرممکن (محال) است.

حالت های هم شانس

اگر احتمال وقوع دو یا چند پیشامد یکسان باشد، می‌گوییم آن پیشامدها، هم‌شانس هستند. به طورمثال احتمال رو یا پشت آمدن در پرتاب یک سکهٔ سالم، با یکدیگر برابر و مساوی $\frac{1}{2}$ است؛ بنابراین این دو پیشامد هم‌شانس هستند.

مثال از یک کیسهٔ حاوی 30 مهره، مهره‌ای را به طور تصادفی بیرون می‌آوریم؛ احتمال آبی بودن مهره $\frac{4}{5}$ است. تعداد مهره‌های آبی چند تا است؟

پاسخ احتمال یک پیشامد برابر نسبت تعداد حالت‌های مطلوب به همهٔ حالت‌های ممکن می‌باشد؛ بنابراین داریم:

$$\text{احتمال خارج شدن مهرهٔ آبی} = \frac{\text{تعداد مهره‌های آبی}}{\text{کل مهره‌ها}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\text{تعداد مهره‌های آبی}}{30} = \frac{4}{5} \Longrightarrow \text{تعداد مهره‌های آبی} = 24$$

نکته احتمال روی دادن یک پیشامد اگر n بار یک کار را انجام دهیم برابر است با:

$$\text{احتمال} = n \times \text{احتمال یک بار روی دادن آن پیشامد}$$

مثال اگر سکه‌ای را ۴۰۰ بار پرتاب کنیم، احتمال روآمدن سکه چقدر است؟

(مشابه تمرین صفحهٔ 131 کتاب درسی)

پاسخ اگر سکه‌ای را یک بار پرتاب کنیم احتمال روآمدنش $\frac{1}{2}$ می‌باشد، بنابراین در 400 پرتاب، تعداد دفعاتی که انتظار داریم رو بیاید برابر است با:

$$400 \times \frac{1}{2} = 200$$

نکته اگر کاری را n بار انجام دهیم، نتیجه‌های قبلی روی نتایج جدید تأثیری نمی‌گذارند. به طورمثال اگر سکه‌ای 5 بار پرتاب شود و همگی رو بیایند، در ششمین پرتاب، احتمال رو آمدن سکه $\frac{1}{2}$ و احتمال پشت آمدن آن نیز $\frac{1}{2}$ می‌باشد و نتایج 5 بار قبلی تأثیری روی بار ششم ندارد.

مثال تاسی را 100 بار پرتاب می‌کنیم و هر بار عددی زوج می‌آید. در پرتاب 101اُم، احتمال این که عددی بخش‌پذیر بر 3 بیاید چند است؟ (مشابه تمرین صفحهٔ 131 کتاب درسی)

پاسخ احتمال در پرتاب 101اُم مستقل از دفعات قبلی می‌باشد. در تاس اعداد 3 و 6 بر 3 بخش‌پذیر می‌باشند؛ بنابراین احتمال این که عدد بر 3 بخش‌پذیر باشد برابر است با:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

بررسی حالت های ممکن

برای محاسبهٔ احتمال روی دادن یک پیشامد، لازم است کلیهٔ حالت‌های ممکن را مشخص کرده و از بین آن‌ها حالت‌های مطلوب را به دست آوریم. برای بررسی و مشخص کردن تمامی حالت‌های ممکن در مواردی که پیچیده است، به صورت راحت‌تر معمولاً از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:

الف) جدول ب) نمودار درختی

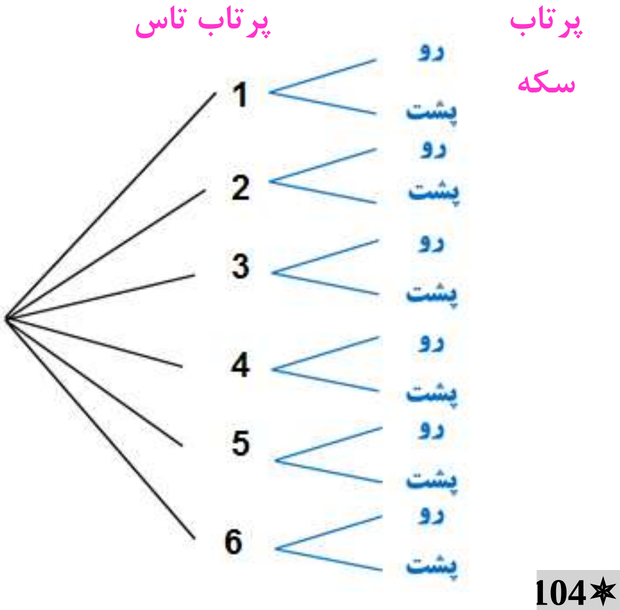
الف) جدول

در این روش حالت‌های یک رویداد را در ردیف افقی و حالت‌های رویداد دیگر را در ستون عمودی می‌نویسیم و تمامی حالت‌های ممکن را بررسی می‌کنیم. به طورمثال در جدول زیر تمامی حالت‌های ممکن پرتاب یک سکه و یک تاس مشخص شده‌اند.

6	5	4	3	2	1	تاس سکه
پ ـ 6	پ ـ 5	پ ـ 4	پ ـ 3	پ ـ 2	پ ـ 1	پشت
ر ـ 6	ر ـ 5	ر ـ 4	ر ـ 3	ر ـ 2	ر ـ 1	رو

ب) نمودار درختی

در این روش تمامی حالت‌های ممکن برای یک رویداد را به صورت شاخه‌های هم‌مبدأ، مقابل آن می‌نویسیم و در ادامهٔ هر شاخه تمامی حالت‌های ممکن رویداد دیگر را به صورت شاخه‌های هم‌مبدأ اضافه می‌کنیم. به طورمثال در نمودار درختی روبه‌رو تمامی حالت‌های ممکن پرتاب یک سکه و یک تاس مشخص شده است.



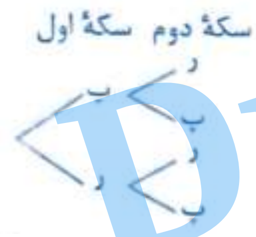
نکته به طورکلی می‌توان گفت اگر حالت‌های ممکن برای یک رویداد برابر m حالت و برای رویداد دیگر برابر n حالت باشد، تعداد پیشامدهای هر دو رویداد به طور هم‌زمان برابر $m \times n$ حالت است.

مثال دو سکه را می‌اندازیم. احتمال این که دست کم یکی از آن‌ها پشت بیاید، چقدر است؟

(تمرین صفحهٔ 135 کتاب درسی)

پاسخ نمودار درختی را برای بررسی همهٔ حالت‌های ممکن رسم می‌کنیم، دست کم یکی از آن ها پشت بیاید یعنی حالت هایی که یکی یا هر دو پشت بیایند مطلوب است.

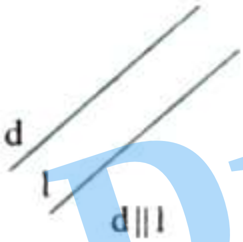
$$\text{احتمال} = \frac{3}{4}$$



فصل نهم: دایره

وضعیت نسبی دو خط در صفحه

دو خط متمایز در صفحه یا موازی‌اند که یعنی نقطهٔ مشترکی ندارند و یا متقاطع هستند که یعنی در یک نقطه مشترک هستند و یکدیگر را قطع می‌کنند.

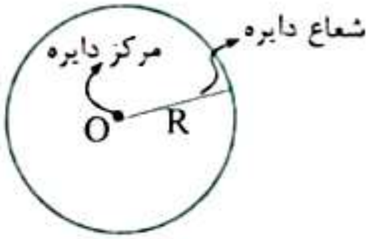


موازی هستند

متقاطع هستند

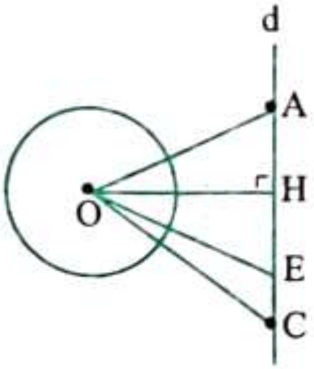
دایره

دایره، مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که همهٔ آن نقاط از یک نقطهٔ ثابت در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصلهٔ ثابت و مشخص هستند. به این اندازهٔ ثابت، شعاع دایره می‌گوییم.



فاصلهٔ یک نقطه از خط

فاصلهٔ یک نقطه از یک خط، طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که آن نقطه را به خط وصل می‌کند؛ بنابراین فاصلهٔ یک نقطه از خط، برابر طول پاره‌خطی است که از آن نقطه بر خط عمود می‌کنیم. در شکل روبه‌رو فاصلهٔ مرکز دایره از خط d برابر طول پاره‌خط OH می‌باشد که بر خط d عمود است.

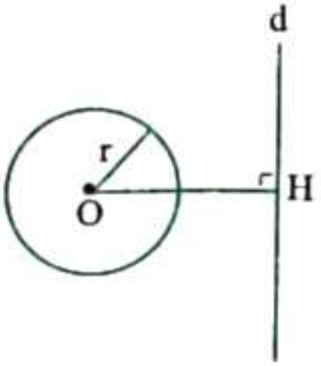


وضعیت نسبی خط و دایره

خط و دایره از نظر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، نسبت به هم سه حالت دارند:

الف) خط، خارج دایره باشد.

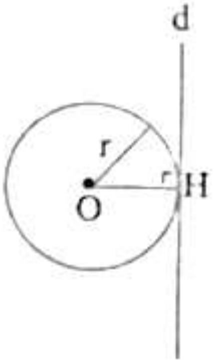
اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد، خط و دایره یکدیگر را قطع نمی‌کنند و با یکدیگر نقطهٔ مشترکی ندارند و به صورت جبری می‌نویسیم:



$$OH > r$$

ب) خط بر دایره مماس باشد.

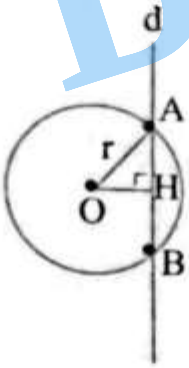
اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، برابر شعاع دایره باشد، خط و دایره دارای **یک** نقطهٔ مشترک هستند و نیز شعاع دایره در نقطهٔ تماس خط با دایره، بر خط مماس، عمود است و به صورت جبری می‌نویسیم:



$$OH = r \ , \quad OH \perp d$$

پ) خط و دایره متقاطع باشند.

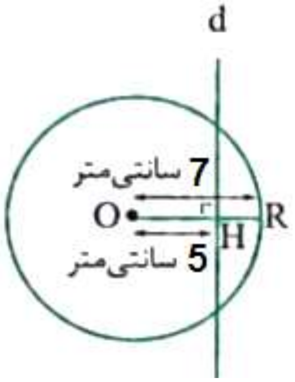
اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط، کم‌تر از شعاع دایره باشد، خط و دایره یکدیگر را قطع می‌کنند و دارای **دو** نقطهٔ مشترک هستند و به صورت جبری می‌نویسیم:



$$OH < r$$

مثال قطر دایره‌ای 14 سانتی‌متر و فاصلهٔ خط d تا مرکز دایره 5 سانتی‌متر است. وضعیت خط و دایره را با رسم شکل بیان کنید و رابطهٔ ریاضی آن را بنویسید.

پاسخ قطر دایره 14 سانتی‌متر است؛ بنابراین شعاع آن برابر 7 سانتی‌متر است و از آن‌جا که فاصلهٔ خط و مرکز دایره از شعاع کم‌تر است، پس خط، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

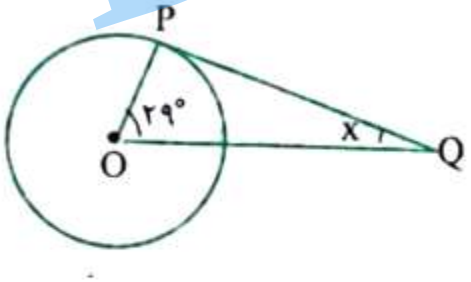


$$OH < OR$$

نکته اگر خطی بر دایره مماس باشد، شعاع در نقطهٔ تماس بر آن خط عمود است. از این نکتهٔ مهم در حل برخی از مسائل به صورت غیرمستقیم استفاده می‌کنیم.

مثال در شکل زیر، PQ بر دایره مماس است. مقدار x را به دست آورید.

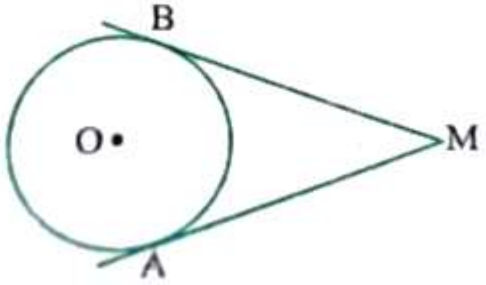
(مشابه کاردرکلاس صفحهٔ 139 کتاب درسی)



پاسخ پاره‌خط مماس PQ در نقطهٔ P بر شعاع دایره عمود است؛ بنابراین در مثلث POQ داریم:

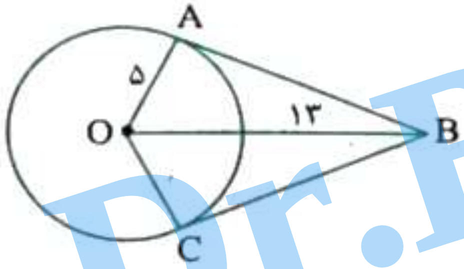
$$x = 180^\circ - (\widehat{P} + \widehat{O}) \quad \Rightarrow \quad x = 180^\circ - (90^\circ + 29^\circ) = 61^\circ$$

نکته از هر نقطه خارج از دایره می‌توان دو مماس بر دایره رسم کرد که طول آن‌ها با هم برابر هستند.



$$MA = MB$$

مثال **نقطهٔ B در فاصلهٔ 13 سانتی‌متری مرکز دایره‌ای به شعاع 5 سانتی‌متر قرار دارد. از این نقطه مماس‌های BA و BC را بر دایره رسم کرده‌ایم. محیط چهار ضلعی BAOC را به دست آورید.**



پاسخ مماس‌های BA و BC با هم برابرند و زوایای A و C قائمه هستند؛ بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس داریم:

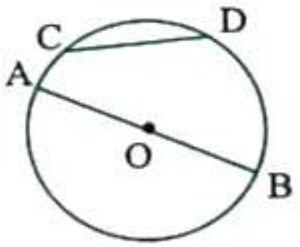
$$OB^2 = OA^2 + AB^2 \quad \Longrightarrow \quad 13^2 = 5^2 + AB^2 \quad \Longrightarrow \quad AB = 12$$

بنابراین محیط چهار ضلعی BAOC برابر است با:

$$\text{محیط} = BA + OA + OC + CB = 12 + 5 + 5 + 12 = 34$$

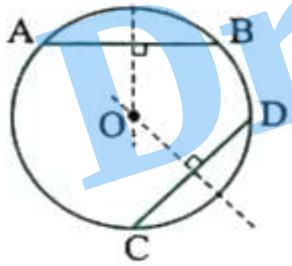
وتر

پاره‌خطی است که دو نقطه از محیط دایره را به هم وصل می‌کند، وتر نام دارد. دقت کنید وترها هر چه به مرکز دایره نزدیک‌تر باشند، دارای اندازهٔ بزرگ‌تری هستند؛ بنابراین بزرگ‌ترین وتر هر دایره، قطر آن است.

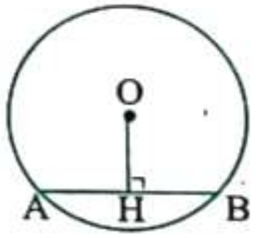


نکات وتر

نکتهٔ1 عمودمنصف‌های دو وتر غیرموازی در دایره، یکدیگر را در مرکز دایره قطع می‌کنند.

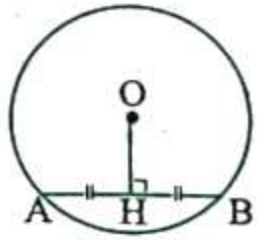


نکتهٔ 2 پاره‌خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند.



$$OH \perp AB \quad \Longrightarrow \quad AH = HB$$

نکتهٔ 3 پاره‌خطی که مرکز دایره را به وسط وتر دایره وصل می‌کند، بر وتر عمود است.



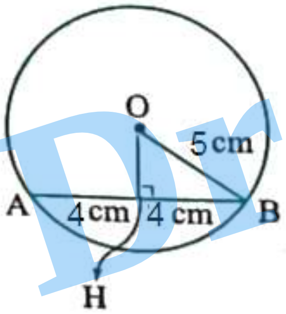
$$AH = HB \Longrightarrow OH \perp AB$$

مثال فاصلهٔ مرکز دایره‌ای به شعاع 5 سانتی‌متر تا وتری به طول 8 سانتی‌متر از آن دایره چقدر است؟

(مشابه تمرین صفحهٔ 141 کتاب درسی)

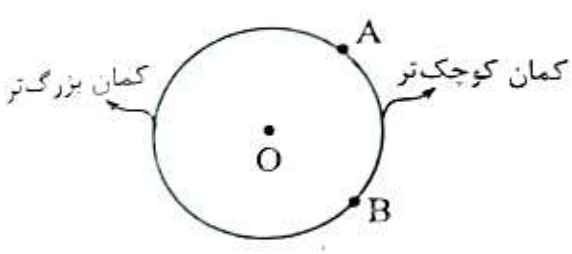
پاسخ می‌دانیم پاره‌خط عمود بر وتر، آن را نصف می‌کند؛ بنابراین با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Longrightarrow 5^2 = OH^2 + 4^2 \Longrightarrow OH = 3cm$$



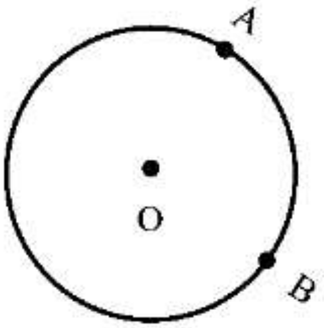
کمان

به قسمتی از محیط دایره که بین دو نقطهٔ متمایز قرار دارد، کمان می‌گوییم. به طورمثال در شکل زیر، نقاط A و B دو کمان روی محیط دایره ایجاد کرده‌اند. کمان کوچک‌تر را به صورت $\overset{\frown}{AB}$ نمایش می‌دهیم و آن را کمان AB می‌نامیم.



اندازهٔ کمان

می‌دانیم محیط هر دایره، برحسب درجه برابر 360° می‌باشد؛ بنابراین اندازهٔ هر کمان برابر نسبتی از محیط دایره است به طورمثال در شکل روبه‌رو کمان AB برابر $\frac{1}{6}$ محیط دایره است که می‌توان گفت اندازهٔ آن برابر $\frac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ$ می‌باشد.



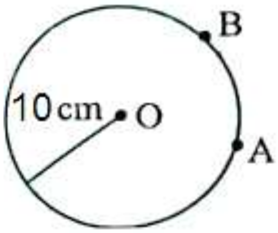
طول کمان

طول هر کمان برابر طول قسمتی از محیط دایره است که بین دو سر هر کمان قرار گرفته است.

نکته بین طول کمان AB و اندازهٔ آن، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازهٔ کمان AB}}{360^\circ}$$

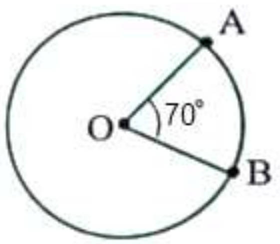
به طورمثال در دایرهٔ روبه‌رو اندازهٔ کمان AB برابر 45° و شعاع دایره 10 سانتی‌متر است؛ بنابراین طول کمان AB برابر است با:



$$\frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان} AB}{2 \times \pi \times 10} \quad \Longrightarrow \quad \text{طول کمان} AB = \frac{1}{8} \times 2 \times \pi \times 10 = 7.85\ cm$$

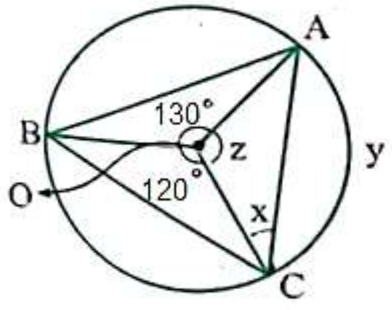
زاویهٔ مرکزی

زاویه‌ای است که رأس آن، روی مرکز دایره و اضلاع آن شعاع‌های دایره است.



نکته اندازهٔ زاویهٔ مرکزی با اندازهٔ کمان روبه‌روی آن برابر است.

مثال **اندازهٔ کمان و زاویه‌های مجهول را پیدا کنید.** (مشابه کاردرکلاس صفحهٔ 143 کتاب درسی)



پاسخ از آن‌جا که هر دایره برابر 360° می‌باشد؛ بنابراین مقدار z برابر است با:

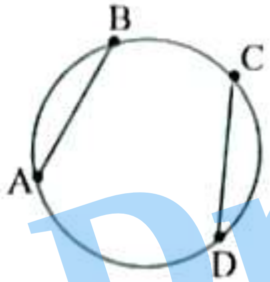
$$z = 360^\circ - (120^\circ + 130^\circ) = 110^\circ$$

و از آن‌جا که کمان AC روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی AOC است؛ بنابراین $y = 110^\circ$ است. اما در مثلث AOC دقت کنید OA و OC برابر شعاع دایره هستند؛ پس مثلث AOC متساوی‌الساقین است؛ بنابراین داریم:

$$180^\circ - 110^\circ = 70^\circ \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

نکات وتر و کمان

نکتهٔ 1 در یک دایره، وترهای نظیر کمان‌های مساوی، با هم برابرند.



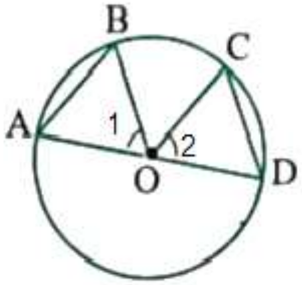
$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \Longrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$$

نکتهٔ 2 در یک دایره، کمان‌های نظیر وترهای مساوی، با هم برابرند.

$$\overline{AB} = \overline{CD} \Longrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

مثال در شکل زیر، دو کمان AB و CD در دایرهٔ زیر، با هم مساوی‌اند. دلیل هم‌نهشتی مثلث OCD و OAB را بنویسید.

(مشابه فعالیت صفحهٔ 144 کتاب درسی)



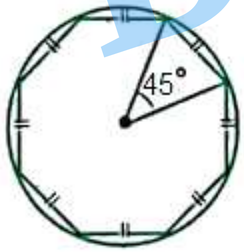
پاسخ با توجه به این که کمان‌های AB و CD با هم برابرند؛ بنابراین زاویه‌های مرکزی روبه‌روی آن‌ها $(\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2)$ نیز با هم برابر هستند و داریم:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{O}_1=\hat{O}_2 \\ &OB=OC \quad \text{شعاع دایره} \\ &OA=OD \quad \text{شعاع دایره} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OCD}$$

تشکیل چندضلعی منتظم

اگر محیط یک دایره را به کمان‌های مساوی تقسیم کنیم، وترهای نظیر آن‌ها تشکیل یک چندضلعی منتظم را می‌دهند.

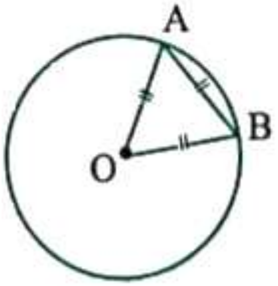
به طورمثال در شکل روبه‌رو محیط دایره به 8 قسمت مساوی تقسیم شده است که اندازهٔ هر کمان برابر 45° و وترهای نظیر کمان‌ها، تشکیل یک هشت‌ضلعی منتظم داده‌اند.



مثال اگر دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ شعاع دایره باز کنیم و از یک نقطه روی محیط دایره، پی در پی کمان بزنیم.

الف) دایره به چند کمان تقسیم می‌شود؟

ب) هر کمان چند درجه است؟



پ) طول هر کمان چه کسری از دایره است؟

پاسخ اگر دهانهٔ پرگار به اندازهٔ شعاع باز شود و شروع به کمان زدن کنیم، همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینیم وتر نظیر هر کمان برابر شعاع دایره است و با توجه به این که مثلث AOB متساوی‌الاضلاع است زاویهٔ O برابر 60° و کمان AB که روبه‌روی آن است 60° می‌باشد:

الف) تعداد کمان‌ها برابر است با:

$$\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$$

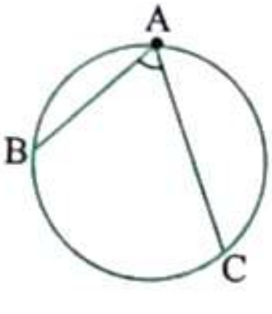
ب) اندازهٔ هر کمان برابر 60° می‌باشد.

پ) هر کمان $\frac{1}{6}$ محیط دایره است؛ بنابراین:

طول هر کمان $= \frac{1}{6} \times$ محیط دایره

زاویهٔ محاطی

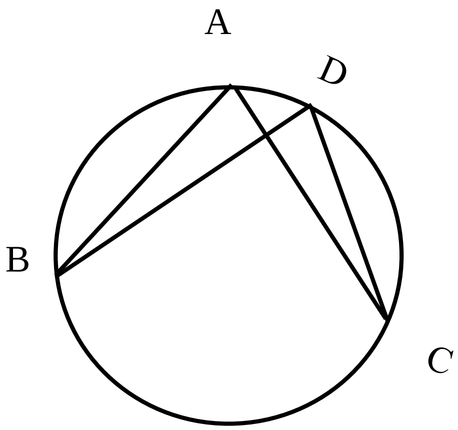
زاویه‌ای است که راس آن، روی محیط دایره و اضلاع آن دو وتر از دایره باشد.



نکات زاویهٔ محاطی

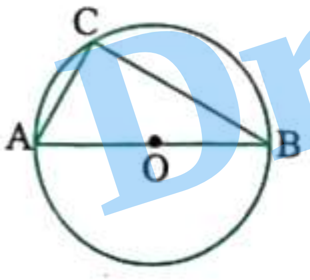
نکتهٔ 1 اندازهٔ هر زاویه محاطی برابر با نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن است.

نکتهٔ 2 زوایای محاطی روبه‌رو به یک کمان با هم برابر هستند.



$$\hat{A} = \hat{D}$$

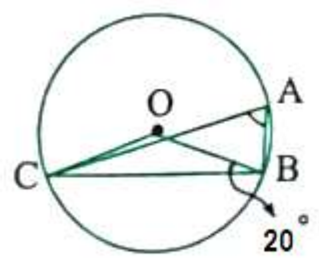
نکتهٔ 3 زاویهٔ محاطی مقابل به قطر دایره، قائمه است.



$$\hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

مثال **در شکل زیر، با توجه به اندازه‌های داده شده، زاویه‌های کمان‌های خواسته شده را به دست آورید.** (مشابه تمرین صفحه 148 کتاب درسی)

$\hat{A} = ?$ $\widehat{BC} = ?$ $C\hat{O}B = ?$



پاسخ از آن‌جا که OB و OC شعاع‌های دایره هستند، بنابراین مثلث OCB متساوی‌الساقین است؛ پس $O\hat{C}B = O\hat{B}C$ و داریم:

$$C\hat{O}B = 180^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 140^\circ$$

چون $C\hat{O}B$ زاویهٔ مرکزی است بنابراین کمان CB نیز برابر 140° می‌باشد و زاویهٔ A، زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان CB است؛ بنابراین:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$